

М. Э. ЭЗИМОВ
Ф. Н. СЭЛИМОВ

ИНТЕГРАЛ ҲЕСАБЫ

маариф • 1986

Әсәрин әлжамасына физика-ријазийәт емләри доктору,
проф. **Ә. Ш. ҺӘБИБЗАДӘ** рә'ј вермишдир.
Елми редактору: Азәрбајҗан ССР ЕА-нын мүхбир үзвү
проф. **А. Ә. БАБАЈЕВ**

Әзимов М. Ә., Сәлимов Ф. Һ.

Ә 38 Интеграл һесабы. Дәрс вәсаити, Бақы, „Маариф“
нәшријаты, 1986-чы ил, 296 сәһ. шәкилли.

Интеграл һесабы кургу ријазии анализин әсас һиссәсини тәшкил едир. Програм әсасында јазылмыш бу әсәрдә ибтидәи функция, әсас интеграллама методлары, мүәјјән интегралын тә'рифи, Дәрбу чәмләри вә онун хассәләри, гејри-мәхсусин интеграл, мүәјјән интегралын тағриби һесаблинамасы, тәтбиғи вә с. нәзәрән кечирилишдир.

Вәсаит али мәктәбләр үчүн нәзәрә тутахмушдур.

А 1702050000—37
М 652—85 —68—86

22. 161. 6

© „Маариф“ нәшријаты, 1986.

ФИЛИАЛ № 11
ЦБ имени С. Бургуна
№ 1113-14

МҮГЭДДИМЭ

Ријази тахсилени тамамлажан һәр бир шәхс бу елмин инкишаф мәрһәлэләри илә јахындан таныш олмалыдыр.

Бу бахымдан тэгдим олунан „Интеграл һесабы“ әсәри ријази анализин ән мүнһүм һиссәләриндән бири олмагла мараглы инкишаф јолу кечмишдир. Функцијанын интегралланмасы мәсәләси илә XVIII әсрин әввәлләриндә Исаак Нјутон, Готфрид Вилһелм Лейбнис мәшгул олмушлар. Лакин илк дәфә (кәсилмәз функцијалар үчүн) бу мәсәләнин мүкәммәл шәкилдә һәллини Огјустен Луи Коши вермишдир.

Даһа сонра бу аялајыш дүнјанын бир чох даһи ријазијатчылары тәрәфиндән инкишаф етдирилмиш вә Георг Фридрих Бернһард Римаи, Гастон Дарбу, Пастер Густав Лежан Дирихле, Һөддер, Һарнах, Валле-Пуссен, Анри Луи Лебег, Емил Борел, Томас Стилтес, Данжуа, А. Ј. Хинчин вә с. интеграллары јаранмышдыр.

Интеграл һесабы бир сыра елмләрин (физика, астрономија, еһтимал нәзәријәси, кимја, биолокија вә с.) инкишафында һәлледичи апарат олмушдур.

Мүвафиг програм әсасында јазылмыш „Интеграл һесабы“ дәрс вәсанти ики һиссәдән вә сәккиз фәсилдән ибарәтдир. Биринчи һиссәдә гејри-мүәјјән интеграл, икинчи һиссәдә мүәјјән интеграл өјрәнилир.

I һиссәнин I фәслиндә интеграл һесабынын әсас мәсәләси, гејри-мүәјјән интегралын һәндәси мә’насы, онун хассәләри, II фәслиндә билаваситә интеграллама, интегралламада әвәзләмә методу, һиссә-һиссә интеграллама, ајырма методлары, садә кәсрләрин интегралланмасы, III фәслиндә чәбри чохһәдлиләрин вуруглара ајрылмасы, дүзкүн расионал кәсрин садә кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилмәси, Остроградски методу, IV фәслиндә садә иррасионал функцијаларын интегралланмасы, Ејлер әвәзләмәләри, онларын һәндәси мә’насы, биномиал диференсиалларын интегралланмасы, Абел әвәзләмәси, V фәслиндә синус вә косинусларын һасилләри иштирак едән функцијаларын вә бә’зи транседент функцијаларын интегралланмасы, $f(\sin x, \cos x)$ шәклиндә олан функцијаларын интегралланмасы, кәтирмә дүстурлары, гиперболик функцијаларын интегралланмасы, гејри-мүәјјән әмсаллар методу, еллиптик

интеграллар; II һиссәнин I фәслиндә ашағы вә Јухары Дарбу чәмләри, онларын хассәләри, мүәҗҗән интегралын һесаблинмасы, онун хассәләри, Валлис дүстуру, вә с., II фәслиндә биринчи вә икинчи нөв гејри-мәхсуси интеграллар, III фәслиндә трапесија методу, Симпсон дүстуру вә с., IV фәслиндә мүстәви фигурун саһәси, чисмин һәчминин тәҗјини, әјри гөвсүнүн узунлуғу, фырланма сәтһинин саһәси, V фәслиндә мүстәви әјрисинин статик моменти вә ағырлыг мәркәзинин тапылмасы вә с. VI фәслиндә параметрдән асылы мүәҗҗән интеграллар верилир.

Һәр бир тәклифин мүкәммәл нәзәри исбаты верилдикдән сонра кифајәт гәдәр мисал һәлл едилир, даһа сонра охучуларын өzlәринин һәлл етмәләри үчүн чалышмалар верилир.

Китаб һаггында арзу вә гејдләри бу үнвана көндәрмәк хаһиш олунур: Бақы 111, Ә. Тағызадә күчәси, 4, „Маариф“ нәшријаты.

ГЕЈРИ-МҮӨЛҮӨН ИНТЕГРАЛ

I ФӘСИЛ

ИБТИДАИ ФУНКСИЈА, ЭСАС АНЛАҢЫШЛАР ВӘ
ТӘРИФЛӘР

§ 1. ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫНЫН ЭСАС МӘСЭЛЭЛӘРИ

Дифференциал һесабында, функција верилдикдә бу функци-
янын төрәмәси вә онун тапылмасы гајдалары өјрәнилир.

*Төрәмәнин тапылмасы әмәлиә функцијанын дифферен-
циалланмасы дејилир.* Беләликлә, дифференциал һесабынын
әсас мәсәләси, верилмиш $F(x)$ функцијасынын $F'(x) = f(x)$
төрәмәсинин вә ја $dF(x) = f(x)dx$ дифференциалынын тапылма-
сы мәсәләсидир. Мәсәлән, $F(x) = x^2$ оларса, $F'(x) = 2x$ олар.
Тәбии олараг бу мәсәләнин тәрси гојула биләр. Белә ки, $f(x)$
функцијасы вериләр, төрәмәси $f(x)$ -ә бәрабәр олан функција-
нын өзү ахтарылар. Башга сөзлә, $F'(x) = f(x)$ ифадәсиндә
 $f(x)$ верилир, $F(x)$ -ин тапылмасы тәләб олунур.

Бу мәсәлә там нәзәри характер дашымагла бәрабәр онун
физикада, механикада вә башга елмләрдә олдугча чохлу
тәتبигләри вардыр. Мәсәлән, мадди нөгтәнин һәрәкәт гану-
нунун тапылмасы мәсәләси белә мәсәләдир. Тутар ки, мадди
нөгтәнин t -дән асылы һәрәкәт сүр'әти $V(t)$ верилмишдир,
 $V(t)$ -нин верилдијини биләрәк һәрәкәт гануну олан $S(t)$ функ-
сијасынын тапылмасы мәсәләси гојулур. Бу тип тәрс мәсәлә-
ләрә мәктәб ријазийјатынын бир чох бөлмәләриндә дә раст
кәлмәк олур. Мәсәлән, вурманын тәрси бөлмә, мүсбәт там
гүввәтә јүксәлтмәнин тәрси көкалма, логарифм вә с.

Ибтидаи функција. Ибтидаи функција аңлајышы рија-
зи анализ курсунун вачиб мәсәләләриндән биридир.

Фәрз едәк ки, $f: [a; b] \rightarrow R$ вә $F: [a, b] \rightarrow R$, $x \in [a, b]$
функцијалары

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

шәртини өдәјән ихтијари функцијалардыр.

Суал олунур ки, (1) бәрабәрлијини өдәјән $F(x)$ функција-
сынын варлыгы үчүн, $f(x)$ функцијасы һансы шәрти өдәмә-
лидир?

Г. Дарбу теореминә әсасән $[a, b]$ парчасында төрәмәси
олан $F(x)$ функцијасы үчүн $F_+(a) = f(a)$ вә $F_-(b) = f(b)$

шәртләри өдәниләрсә, онда $F_-(x)$ функцијасы $A = F'_+(a)$ вә $B = F'_-(b)$ арасындакы бүтүн аралыг гијмәтләри алар. Онда (1) бәрабәрлијинә әсасән дејә биләрик ки, $f(x)$ функцијасы да $f(a)$ вә $f(b)$ арасындакы бүтүн гијмәтләри алар.

Демәли, (1)-дән гејд олуан $f(x)$ функцијасы кәсилмәз функција олмалыдыр.

Тә'риф 1. $f(x): J \rightarrow R$ (бурада J —интервал вә ја парча-дыр) вә $F(x): J \rightarrow R$ функцијалары $\forall x \in J$ нөгтәсиндә $F'(x) = f(x)$ шәртини өдәјирсә, онда $F(x)$ функцијасына $f(x)$ -ин ибтидаи функцијасы дејилир.

Елә һиссә-һиссә кәсилмәз функција ола биләр ки, бу функција үчүн јухарыда сөјләнән тә'риф өз күчүндә галмасын.

Мәсәлән, $f: x \rightarrow \operatorname{sgn} x$, $a \leq x \leq b$, ($a \cdot b < 0$) функцијасы һиссә-һиссә кәсилмәздир. Лакин бу функцијанын $[a, b]$ парчасында ибтидаи функцијасы јохдур. Доғрудан да бу функција анчаг -1 , $0, 1$ гијмәтләрини ала билдијә үчүн, $F: [a; b] \rightarrow R$ функцијасынын төрәмәси илә үст-үстә дүшә билмәз, чүнки Дарбу теореминә көрә бу функција -1 илә 1 арасындакы бүтүн гијмәтләри алмалыдыр. Көрүндүјү ки, о, аралыг гијмәтләрин һамысыны ала билмир. Бу исә бахылан мисалын ибтидаи функцијасынын олмадығыны көстәрир.

Гејд. Ибтидаи функција $[a, b]$ парчасында тә'риф вериләрсә, парчадаһилиндә $F'(x) = f(x)$, парчанын үч нөгтәләриндә исә $F'(a+0) = f(a)$ вә $F'(b-0) = f(b)$ мүнәсибәтләри өдәнмәлидир.

Мисал 1. Бүтүн әдәд охунда, $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$ олдуғу үчүн, $F(x) = \frac{x^4}{4}$ функцијасы, $f(x) = x^3$ функцијасынын ибтидаи функцијасыдыр.

Мисал 2. $]-1; 1[$ интервалында $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ олдуғу үчүн, $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ функцијасы $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функцијасынын ибтидаи функцијасыдыр.

Мисал 3. $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ интервалында $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ олмасындан алырыг ки, $F(x) = \ln|x|$ функцијасы $f(x) = \frac{1}{x}$ функцијасынын ибтидаи функцијасыдыр.

Верилмиш функцијанын ибтидаи функцијасынын тапылмасы интеграл һесабынын әсас мәсәләсидир. Ибтидаи функцијанын тапылмасы мәсәләсинин һәлли јекәнә олмајыб, сонсуз сајдадыр.

Догрудан да, $F_1(x) = \sin x$, $F_2(x) = \sin x + 15$, $F_3(x) = \sin x + 1$ вә с. функциялары $f(x) = \cos x$ функциясынын ибтидаи функцияларыдыр.

Үмумијјәтлә, $(\sin x + C)' = \cos x$ (бурада вә сонралар $C \in \mathbb{R}$) олдуғу үчүн $F(x) = \sin x + C$ функциясы, $f(x) = \cos x$ функциясынын ибтидаи функциясыдыр. Бу мисалдан көрүнүр ки, функциянын бир ибтидаи функциясы тапыларса, һәмин функциянын $F(x) + C$ шәклиндә мүәјјән бир синиф ибтидаи функцияларыны тапмаг олар.

Догрудан да, $F'(x) = f(x)$ оларса, онда $(F(x) + C)' = f(x)$ олар.

Демәли, $F(x) + C$ функциясы $f(x)$ -ин ибтидаи функциясы олар.

Теорем. $[a, b]$ интервалында верилмиш кәсилмәз функциянын ихтијари ики ибтидаи функциясынын фәрги сабитдир.

◀ Тутаг ки, фәрг $\varphi(x)$ функциясына бәрабәрдир.*

$F_1(x)$ вә $F_2(x)$ функциялары $f(x)$ функциясынын истәни- лән ики ибтидаи функциясы олсун. Јәни $\forall x \in [a, b]$ үчүн

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x) \quad (1')$$

олар.

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

ишарә еләк. $\varphi(x) = C$ олдуғуну кәстәрмиш олсаг, онда тео- рем исбат олунар $[a, b]$ интервалында $F_1(x)$ вә $F_2'(x)$ функ- сияларынын төрәмәләри олдуғундан $\varphi(x)$ -ин дә төрәмәси вар:

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x). \quad (3)$$

(1)-и (3)-дә нәзәрә алсаг:

$$\varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0. \quad \text{w}$$

Инди исә $\varphi(x)$ функциясынын сабит олдуғуну кәстәрәк $\varphi(x)$ функциясы үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәт- биг етсәк, $a, b \supset x_1, x_2$ парчасында

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1) \varphi'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2). \quad (4)$$

$\varphi'(\xi) = 0$ олдуғуну (4) бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг, $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 0$ ејнилик кими өдәнәр, онда

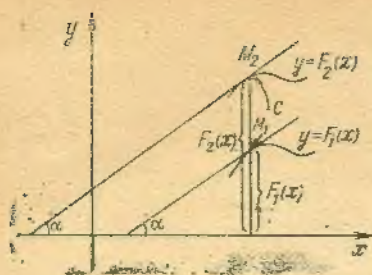
$$\varphi(x_2) = \varphi(x_1) = C \quad (5)$$

алынар. (5) илә (2)-ни тутушдурсаг:

$$F_1(x) - F_2'(x) = C. \quad (6)$$

(6) ифадәсини $F_1(x) = F_2(x) + C$ шәклиндә јазмаг олар. Демә- ли, $f(x)$ функциясынын ибтидаи функцијалар чохлағу $F(x) + C$ аидәси илә тамамилә ифадә едилир. ►

* ◀ ишарәси тәклифин исбатынын башландығыны, ► ишарәси исә ис- батын тамамландығыны кәстәрир.



Шәкил 1

Теоремин һәндәси мә'насы ашағыдакы кимидир.

$y = F_1(x)$ вә $y = F_2(x)$ ејни бир $f(x)$ функцијасынын ибтидаи функцијалары олсун, јә'ни $\operatorname{tg} \alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ олдугундан, абсиссләри ејни олан M_1 вә M_2 нөггәләриндән бу әјриләр рә чәкилән тохунанлар паралелдир (шәкил 1).

Башга сөзлә бу әјриләр мүәјјән мә'нада „паралелдир“* вә

M_1, M_2 нөггәләри арасындакы мәсафә C сабитинә бәрәбәр-дир.

Тә'риф 2 $[a, b]$ интервалында верилмиш $f(x)$ функцијасынын бүтүн ибтидаи функцијалар чохлагуна, һәмин интервалда $f(x)$ функцијасынын гејри-мүәјјән интегралы дејилир вә

$$\int f(x) dx$$

шәклиндә јазылыр. „Интеграл еф икс де икс“ кими охунур. Тә'рифә көрә

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

Бурада $f(x)$ —интегралалты функција,

$\int f(x) dx$ —интегралалты ифадә,

$F(x)$ —интегралын функционал һиссәси,

\int —интеграл ишарәси, C —интеграл сабитидир.

Функцијанын гејри-мүәјјән интегралынын тапылмасы әмәлинә функцијанын интегралланмасы дејилир.

Функцијанын дифференциалланмасы вә интегралланмасы әмәлләри гаршылыгылы тәрс әмәлләрдир. Биз кәләчәкдә теорем кими исбат едәчәјик ки, $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмиш истәнилән кәсилмәз функцијанын ибтидаи функцијасы вардыр. Сөјләдијимиз бу факт ибтидаи функцијанын варлығына һөкм верир, анчаг бу ибтидаи функцијаны һәмишә сонлу сајда һесаб әмәлләри васитәсилә елементар функцијалар шәклиндә ифадә етмәк мүмкүн олмур. Мәсәлән,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{dx}{\sin x}, \int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx$$

вә $\int \cos x^2 dx$ интегралларынын ибтидаи функцијалары елементар функцијалар шәклиндә көстәрилә билмир.

* Нөггәдә тохунанлары паралел олан әјриләр, һәмин нөггәтени јахын әтрафында паралел әјриләр адланыр.

Бурада дөрдүнчү интеграл Пуассон интегралы адланыр. Истиликкечирмә вә диффузија нәзәријәсиндә, бешинчи вә алтынчы интеграллара Френел интеграллары дејилир, онлардан оптика нәзәријәсиндә истифадә олунур.

§ 2. ГЕЈРИ-МҮӘЈҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ҖӘНДӘСИ МӘНАСЫ

Гејри-мүәјҗән интегралларын тапылмасы мәсәләси, һәндәси олараг тохунанларынын бучаг әмсалы $f(x)$ олан $y = F(x) + C$ әјриләр айләсинин тапылмасы демәкдир. Башга сөзлә, бучаг әмсалы $k = \operatorname{tg} \alpha = f(x)$ олан әјрини тәјин етмәк лазымдыр.

Демәли,

$$F'(x) = f(x) = k; \quad (1)$$

олан $F(x)$ функцијасыны тапмаг тәләб олунур. Ибтидаи функцијанын тәрифинә кәрә (1) бәрабәрлији кәстәрир ки, $F(x)$ функцијасы $f(x)$ -ин ибтидаи функцијасыдыр.

Беләликлә, гаршыја гојулан мәсәлә интеграл һесабынын әсас мәсәләси олан ибтидаи функцијанын тапылмасына кәтирилир, јәни

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Бурадан ашкар олур ки, гојулан мәсәләнин шәртини бир јох, сонсуз сәјдә әјри өдәјәр. $y = F(x) + C$ —бу әјриләрдән биридиксә, ону өзүнә параллел көчүрмәклә башгаларыны алмаг олар (шәкил 2).

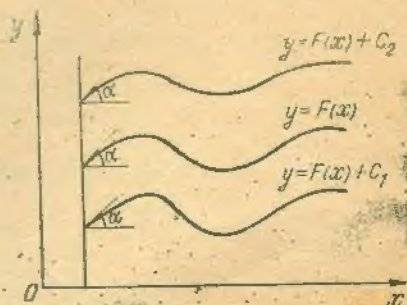
Әјриләр айләсиндән мүәјҗән бирини сечмәк үчүн әлавә шәрт дахил етмәк лазымдыр. Мәсәлән, $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән кечән әјринин тәјин едилмәси тәләб олунарса, мәсәлә јеканә олараг һәлл едилир. Доғрудан да $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсинин координатлары

$$y = F(x) + C \quad (2)$$

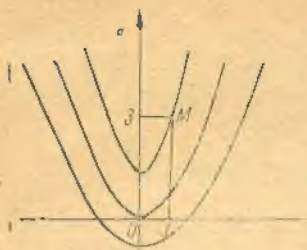
тәңлијини өдәмәли, јәни $y_0 = F(x_0) + C$ вә ја $C = y_0 - F(x_0)$ олмалыдыр. C -нин бу гижмәтини (2)-дә јазсаг мәсәләнин јеканә $y = F(x) + y_0 - F(x_0)$ һәлли тапылар.

Мисал. $f(x) = 2x$ функцијасынын ибтидаи функцијалары чохлағуну тапын.

■ $F(x) = x^2$ функцијасы ибтидаи функцијалардан биридикр. Онда $y = \int 2x dx = x^2 + C$ функцијалары бүтүн ибтидаи функцијалар чохлағудур. C -јә истәһилән 6, 4, 1, 0, -4, -2, гижмәтләрини вермәклә, $y = x^2 + 6$, $y = x^2 + 4$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2$, $y = x^2 - 4$ вә $y = x^2 - 2$



Шәкил 2



Шәкил 3

функцияларыны аларыг. Бунларын графика, симметрия оху Oy олан параболалар айләсидир (шәкил 3)

Бу мәсәлә үчүн башлангыч шәр-ти белә гојула биләр: $y = x^2 + C$ вараболалар айләсинә дахил олан ә $M(1; 3)$ нөгтәсиндән кечән па-раболаны тә'јин един.

$x_0 = 1, y_0 = 3$ олдугундан $3 = 1 + C$ вә ја $C = 2$ олар. Демәли, $y = x^2 + 2$ ахтарылан параболоадыр.

$F(x) = x^2 + C$ әриләр айләсинин ејни x -и үчүн тохунанла-рын бучаг әмсалы $k = y' = 2x = f(x)$ -ә бәрәбәрди. Беләликлә, ибтидаи функциянын тапылмасы мәсәләсини һәндәси олараг ашағыдакы кими баша дүшүрүк: елә $y = F(x)$ функциясы ах-тарылыр ки, бу функцияја чәкилән тохунанын бучаг әмсалы $k = \operatorname{tg} \alpha = F'(x) = f(x)$ ганунуна табе олсун. ■

§ 3. ГЕЈРИ-МҮӘЈҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ХАССӘЛӘРИ

Гејри-мүәјҗән интегралын тә'рифиндән истифадә едәрәк ашағыдакы хассәләри исбат етмәк олар. Исбат просесиндә, иштирак едән функцияларын интегралланан олдугуну фәрз едәчәјик.

Хассә 1°. Гејри-мүәјҗән интегралын төрәмәси интегралалты функцияја, дифференциалы исә интегралалты ифадәја бәрәбәр-дир.

◀ Тә'рифә көрә

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1)$$

(1) бәрәбәрлијинин һәр ики тәрафиндән төрәмә алсаг,

$$\left(\int f(x) dx \right)' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x),$$

ејни гајда илә

$$d\left(\int f(x) dx \right) = \left(\int f(x) dx \right)' dx = f(x) dx. \quad \blacktriangleright$$

Хассә 2° һәр һансы функциянын дифференциалынын гејри-мүәјҗән интегралы, бу функция илә ихтијари сабитин чәминә бәрәбәрди:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

◀ $F(x)$ функциясы, $F'(x)$ функциясынын ибтидаи функци-јасы олдугундан

■ ишарәси мисал һәллинин башланмасыны вә гуртармасыны көстәрир.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

вə ја

$$\int dF(x) = F(x) + C. \blacktriangleright$$

d символу интегралдан сонра калдикдэ, бунлар бир-бирини јох едир вэ нэтичэјэ C сабити элава олунур.

Хассэ 3°. Сабит вуруғу интеграл ишарэсi алтындан чл-хартмаг олар:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx,$$

бурада k ихтијари сабитдир.

$$\blacktriangleleft \int d \left[\int f(x)dx \right] = k \left[d \left[\int f(x)dx \right] \right] = kf(x)dx$$

олдугу үчүн

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \blacktriangleright$$

Хассэ 4. Икн функцијанын чэбри ч мннн интегралы, онларын интегралларынын чэбри ч мннэ бэрабэрдир:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx. \quad (2)$$

\blacktriangleleft Эввэла илгејд едэк ки, (2) бэрабэрлији икн чохл, лугун бэрабэрлији мэ'пада баша дүшүлүр

Функцијанын икн ибтидан функцијасынын бир-бириндэн ихтијари сабатлэ фэрглэндјини нэзэрэ алыб, $f(x)$ -ин ибтидан функцијасыны $F(x)$ вэ $\varphi(x)$ -ин ибтидан функцијасыны $\Phi(x)$ сшарэ етсэк, онда $F(x) + \Phi(x)$ функцијасы, $f(x) + \varphi(x)$ функцијасынын ибтидан функцијасы олар:

$$[F(x) + \Phi(x)]' = F'(x) + \Phi'(x) = f(x) + \varphi(x). \blacktriangleright$$

Аналэжи оларат

$$\begin{aligned} & \int [f_1(x) + f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]dx = \\ & = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots \pm \int f_n(x)dx \end{aligned}$$

бэрабэрлијинин доғру олдугуну исбат етмэк олар.

II ФӘСИЛ

ӘСАС ИНТЕГРАЛЛАМА МЕТОДЛАРЫ

§ 1. БИЛАВАСИТӘ ИНТЕГРАЛЛАМА

Интеграллама әмәли дифференциалламанын тэрсин олдугу үчүн, бир сыра функцијаларын интегралыны билаваситэ јазмаг олар. Бу интеграллара *чэввэл интеграллары* дејилир.

$$1. \int 0 \cdot dx = 0.$$

$$2. \int dx = x + C.$$

$$3. \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \neq -1, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \in J, J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1), a \rightarrow e \text{ оларса,}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, x \in \mathbb{R}.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C, x \in \mathbb{R}.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C, x \in \mathbb{R}.$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$10. \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C, x \in J \subset \mathbb{R}, \left| \frac{x}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right|.$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C, x \in J \subset \mathbb{R}, \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$12. \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arctg} x + C, \end{cases} \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{cases}$$

$$13. \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} x + C, \\ \operatorname{arccos} x + C, |x| < 1. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, |x| < |a| \end{cases}$$

$$14. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcsec} x + C, \\ -\operatorname{arccosec} x + C, |x| > 1. \end{cases}$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 \pm 1} = \ln|x \pm \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

(мәңфи ишарәси олан ҳалда $|x| > 1$ көтүрүлүр)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,$$

(мәңфи ишарәси олан ҳалда $|x| > a$ олмалыдыр)

$$16. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, |x| \neq 1,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad |x| \neq a.$$

Билаваситэ гейри-мүейян интегралын тә'рифиндән истифадә едәрәк јухарыдакы дүстурлардан бә'зиләрини исбат едәк.

1. $(x + C)' = 1$ олдуғундан $\int 1 \cdot dx = x + C$.

2. $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \right)' = x^{\mu}$ олдуғундан $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$.

3. Интегралалты $\frac{1}{x}$ функцијасы $|x| \neq 0$ нөгтәсиндән башга һәр јердә кәсимләзdir.

а) $x > 0$ оларса, $|x| = x$ вә $\ln |x| = \ln x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Демәли, $x > 0$ олдуғда $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln |x| + C$.

б) $x < 0$ оларса, $|x| = -x$ вә $\ln |x| = \ln (-x)$ олар. Дикәр тә-рәфдән $[\ln (-x)]' = \frac{-1}{x} = -\frac{1}{x}$ олдуғундан, $x < 0$ һалы үчүн $\int \frac{dx}{x} = \ln (-x) + C = \ln |x| + C$.

4. $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C \right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$ олдуғундан $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $(-\cos x + C)' = \sin x$ олдуғундан, $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $(\sin x + C)' = \cos x$ олдуғундан $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $(-\ln \cos x + C)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ олдуғундан $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$.

Ғалан дүстурларын доғрулуғуну јухарыда көстәрдијимиз ғајда илә асанлығла исбат етмәк олар.

Гејд 1. Интеграл дәјишәни x олмајыб, һәр һансы башга бир дәјишә-нин функцијасы оларса, јухарыдакы дүстурлар өз күчүндә ғалыр

Јә'ни

$$\int f(U) dU = F(U) + C,$$

бурада $U = \varphi(x)$.

Мисаллар

1. $\int \cos^4 x \sin x dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $\sin x dx = -d(\cos x)$ олдуғу үчүн,

$$\int \cos^4 x \sin x dx = - \int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C. \quad \blacksquare$$

2. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $e^x dx = d(e^x)$ олдуғу үчүн,

$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \operatorname{arctg}(e^x) + C. \blacksquare$$

Гејд 2. Бәзи интегралларын һесаблинамасы үчүн уңгун чәдвәл интеграллары тәртиб едилмир Мәсәлән, интегралалты функция кәсдирсә ва бу кәсрин сурәти мәхрәчин төрәмәсинә оар, оар оларса,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Догрудан да, $\int \frac{f'(x) dx}{d(f(x))}$ олдуғундан

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{d f(x)}{f(x)} = \int d(\ln |f(x)|) = \ln |f(x)| + C.$$

Мисал 3. $\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 - 15} dx$ интегралыны һесаблимамы.

■ $d(x^3 - 2x^2 - 15) = (3x^2 - 4x) dx = (3x^2 - 4x) dx$ олдуғундан

$$\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 - 15} dx = \int \frac{d(x^3 - 2x^2 - 15)}{x^3 - 2x^2 - 15} = \ln |x^3 - 2x^2 - 15| + C. \blacksquare$$

Мисал 4. $\int \frac{dx}{\sin x}$ интегралыны һесаблимамы.

$$\blacksquare \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

олдуғундан

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \blacksquare$$

Ејни гајда ялә

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C. \blacksquare$$

§ 2. ИНТЕГРАЛЛАМАДА ӘВӘЗЛӘМӘ МЕТОДУ

Бир чох һалларда верилмиш интеграллары зсанлыгла чәдвәл интегралына билаваситә кәтирмәк олмур. Белә олан һалларда бә'и әвәзләмә методундан истифадә едилмир. Белә ки,

$\int f(x) dx$ интегралында x -и јени дәјишмәлә әвәз етмәклә интегралы садә шәклә кәтирмәк олур. Әвәзләмәнин сечәлмә-

си стандарт олмайыб, интеграл ҳесаблајанын тәчрүбәси вә мәһарәтиндән асылыдыр.

$\int f(x)dx$ интегралыны ҳесабламағ үчүн $x = \varphi(t)$ әвәзләмәси апарылыр. Бурада $\varphi(t)$ функцијасынын бахылан интервалда кәсилмәз тәрәмәси олдуғу нәзәрде тутулвр.

Бу һалда $dx = \varphi'(t)dt$ вә

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (1)$$

дүстуру алыначагдыр.

► (1) бәрәбәрлијиндә сағ вә сол тәрәфләрин дифференциалларынын бәрәбәр олдуғуну кәстәрмәк кафидир. Догрудан да,

$$d \int f(x)dx, \quad f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

$$d \left(\int [\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad \blacktriangleright$$

Ғејд 1-ән лалларда $x = \varphi(t)$ әвәзләмәси әвәзинә, бунын $t = \varphi(x)$ кими тәрә әвәзләмәсини апармағ даһа мөгсәдәујғун олвр.

Әвәзләмә методуна аңд мисаллар кәстәрәк.

Мисал 1. $J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ интегралыны ҳесабламалы.

■ $x = a \sin t$ әвәзләмәсиндән, $dx = a \cos t dt$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t.$$

$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ олдуғда, $x \in [-a, +a]$ олар. t дәјишәнинин бүтүн гијмәтләриндә $\cos t \geq 0$ олдуғундан $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Беләликлә,

$$\begin{aligned} J &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t + C. \end{aligned} \quad (2)$$

Апарылан әвәзләмәдән $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$ вә $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$ олар. t вә $\sin 2t$ үчүн алынмыш гијмәтләри (2) бәрәбәрлијиндә јеринә јазсағ,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ ($a \neq 0$) интегралыны ҳесабламалы.

■ $t = \frac{x}{a}$ әвәзләмәсиндән истифадә етсәк,

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \\ = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (|x| < a)$ интегралыны ҳесабли-
мады.

■ $t = \frac{x}{a}$ эвәзләмәсиндән,

$$J = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin} t + C = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 4. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ интегралыны ҳесаблимады.

■ $\sqrt{x^2 + a} = t - x$ эвәзләмәсиндән, $x = \frac{t^2 - a}{2t}$, $dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt$,
 $\sqrt{x^2 + a} = t - x = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{t^2 + a}{2t}$ аларыг. Бунылары интег-
ралда нәзәрә алсаг,

$$J = \int \frac{2t}{t^2 + a} \cdot \frac{t^2 + a}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 5. $J = \int (ax + b)^n dx (n \neq -1)$ интегралыны ҳесабли-
ламады.

■ $t = ax + b (dt = a dx)$ эвәзләмәсиндән истифадә етсәк,

$$J = \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 6. $J = \int \frac{\operatorname{arcsin} ax}{\sqrt{1 - a^2 x^2}} dx \left(|x| < \frac{1}{a}\right)$ интегралыны ҳе-
саблимады.

■ $t = \operatorname{arcsin} ax$ илә эвәз етсәк, $dt = \frac{adx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$ олар вә

$$J = \frac{1}{a} \int t dt = \frac{1}{2a} t^2 + C = \frac{1}{2a} (\operatorname{arcsin} ax)^2 + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 7. $J = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$ интегралыны ҳесаблимады.

■ $x = \operatorname{tg} \alpha$ илә эвәз етсәк, $dx = a \sec^2 \alpha d\alpha$ олар вә
 $x^2 + a^2 = a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = a^2 \sec^2 \alpha$.

Бу ифадәләри интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = \int \frac{a \sec^2 a da}{a^2 \sec^4 a} = \frac{1}{a^2} \int \frac{da}{\sec^2 a} = \frac{1}{a^2} \int \cos^2 a da = \\ = \frac{1}{2a^2} \int (1 + \cos 2a) da = \frac{1}{2a^2} \left[a + \frac{\sin 2a}{2} \right] + C$$

Апарылан эвэзлэмэдэн $\alpha_2^1 = \arctg \frac{x}{a}$ вэ

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \alpha}}}{1+tg^2 \alpha} = \frac{tg \alpha}{a^2 + x^2}$$

олдугуну аларыг. Белэликлэ,

$$J = \frac{1}{2a^2} \left(\arctg \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} \right) + C. \blacksquare$$

Мисал 8. $J = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ интегралыны хесабламалы.

■ Интегралалты функция үзэриндэ садэ чевирмэ апарсаг, $t = tg x$ эвэзлэмэсэ илэ чэдвэл интегралына кэлэн интеграл алынар:

$$J = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{d(tg x)}{3 + 4tg^2 x} = \int \frac{dt}{3 + 4t^2} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2tg x}{\sqrt{3}} + C. \blacksquare$$

Мисал 9. $J = \int \frac{dx}{3\cos^2 x - 5\sin^2 x}$ интегралыны хесабламалы.

■ $z = tg x$ илэ эвэз етсэк,

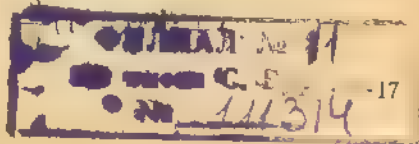
$$J = \int \frac{d(tg x)}{3 - 5tg^2 x} = \int \frac{dz}{5z^2 - 3} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}z - \sqrt{3}}{\sqrt{5}z + \sqrt{3}} \right| + C = \\ = \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} \sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sqrt{5} \sin x + \sqrt{3} \cos x} \right| + C. \blacksquare$$

Чалышмалар

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{1+x}}$
3. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} dx$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-2(\ln x)^2}}$
5. $\int \frac{8x+7}{x^3+x} dx$
6. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

Чаваблар

6. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$
- $2 \arctg \sqrt{1+x} + C$
- $\frac{4x^2+10x+16}{12\sqrt{2x-5}} + C$
- $\frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2} \ln x) + C$
- $\ln |x^8 + x^7| + C$



$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}, \quad \arcsin \frac{x+3}{4} + C.$$

$$8. \int \frac{\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)(\sin x - 2\cos x + 1)} dx, \quad \ln |\sin 2x - 2\cos x - 1| + C.$$

$$9. \int \sqrt[3]{x+a} dx, \quad \frac{3}{4} (x+a)^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{x+a} + C.$$

$$10. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\cos x - \sin^2 x} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

$$12. \int \sqrt{1+e^x} dx, \quad 2\sqrt{1+e^x} + 2\ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - x + C.$$

§ 3. БИССЭ-БИССЭ ИНТЕГРАЛЛАМА МЕТОДУ

Интегралларын хэсэбланмасында сэмэрэли методлардан бири дэ биссэ-биссэ интеграллама методдур. Бу метод эн чох. интеграл алтында трансцендент функција илэ чоххэдлинин пасили олан нэлларда тэгбэгед лар.

Теорем. $U(x)$ вэ $V(x)$ функцијалары $\{x$ чохлуғунда дифференциалланан оларса, вэ бу чохлуғда $V(x) \cdot U'(x)$ функцијасынын ибтидаи функцијасы варса, онда нэми чохлуғда $U(x) \cdot V'(x)$ функцијасынын да ибтидаи функцијасы вар вэ

$$\int U(x) V'(x) dx = U(x) V(x) - \int V(x) U'(x) dx \quad (1)$$

дүстүрү доғрулур.

$$\triangleq [U(x)V(x)]' = U(x)V'(x) + U'(x)V(x)$$

барабарлијинин нэр тэр. фани dx -и вуруб интегралласаг,

$$\int [U(x) \cdot V(x)]' dx = \int U(x)V'(x) dx + \int U'(x)V(x) dx$$

аларыг. Шэртэ көрэ $\{x\}$ чохлуғундан көтүрүлмүш нэр бир x үчүн $\int V(x)U'(x) dx$ интегралы вэр вэ

$$\int [U(x)V(x)]' dx = U(x)V(x) + C$$

Онда $\int U(x)V'(x) dx$ интегралы да вар. Белэликлэ, (1) дүстүрү доғрудур.

Гејд Дифференциаллы тэрифила вэ инвариантлыг хэссэинэ көрө (1) дүстүрүнү

$$\int U dV = UV - \int V dU \quad (2)$$

шаклинде јазма олар

$U(x)$ вэ $V(x)$ функцијаларынын бахылан чохлуғда $(n+1)$ тэртибдэн пасилмэз төрэмэлэри варса, онда (1) дүстүрүндэ $U(x)$ эвэзинэ $(V(x))^n$ јазсаг,

$$\int UV^{(n+1)} dx = \int U dV^{(n)} = UV^{(n)} - \int V^{(n)} dU = UV^{(n)} - \int U' V^{(n)} dx.$$

Аналоги олараг

$$\int U' V^{(n)} dx = U' V^{(n-1)} - \int U'' V^{(n-1)} dx,$$

$$\int U'' V^{(n-1)} dx = U'' V^{(n-2)} - \int U''' V^{(n-2)} dx,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int U^{(n)} V dx = U^{(n)} V - \int L^{(n+1)} V dx.$$

Ардычыл олараг бу бораборликларин һәр ики тәрәфини нөвбә илә +1 вә 1-ә вуруб топласаг

$$\int UV^{(n+1)} dx = UV^{(n)} - U' V^{(n-1)} + U'' V^{(n-2)} - \dots + (-1)^n U^{(n)} V + (-1)^{(n+1)} \int U^{(n+1)} V dx. \quad (3)$$

(3)-ә умумиләшмәни һисәп һисәп интеграллама дүстүрү дәрҗәһә һисәп һисәп интеграллама методу итә баланың олараг,

$$x^k \ln^m x, x^k \sin ax, x^k \cos \beta x, x^k e^{ax}, x^k \arcsin x, x^k \arccos x, x^k \operatorname{arctg} x, x^k \operatorname{arcctg} x, x^k \operatorname{arcsec} x, x^k \operatorname{arcosec} x$$

функциялариниң интеграллары һесабланыр. ►

Һисәп һисәп интегралламада мүнһәм мәсәлә U вә dV ифадәләриниң даһа мүнәкәб сечиләр сәһәр Мәсәлә, $\int \operatorname{arctg} x dx$ интегралы һесабланаркы U вә dV бир таҗаҗ илә, $\int U dV = U V - \int V dU$ илә $dU = \frac{dx}{1+x^2}$, $V = x$

$$dU = \frac{dx}{1+x^2}, V = x$$

олар. Беләликлә,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x + \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Җеһәдәкки, U вә dV дүзкүн сечиләр икән, даһа мүнәкәб олан интеграл алына биләр.

Мәсәлә, $\int x e^x dx$ интегралында $U = e^x$, $dV = x dx$ кими ишарә етсәк, $dU = e^x dx$, $V = \frac{1}{2} x^2$ вә

$$\int x e^x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

алынар. Сағ тәрәфдәки интегралын верилмәһи интегралдан даһа мүнәкәб олдугу ашкар көрүнүр. Бу мәсәлдә U вә dV ифадәләри дүзкүн сечиләрсә, $\int U dV = U V - \int V dU$

$$U = x, dV = e^x dx; dU = dx, V = e^x$$

оларса, онда

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x(e^x - 1) + C.$$

Ниссә-ниссә интеграллама методуну тәтбиг етмәклә

$$J = \int e^{ax} f(x) dx \quad (4)$$

интегралыны һесәблаҗаг. Бурада $f(x)$ функциясен n -чи тәртибдән кәсилмәз төрмәзә малыкдир. (3) дүстүруну тәтбиг етсәк

$$J = \frac{1}{a} e^{ax} \left[f(x) - \frac{1}{a} f'(x) + \frac{1}{a^2} f''(x) - \frac{1}{a^3} f'''(x) + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{a^n} f^{(n)}(x) \right] + C$$

олдугуну аларыг.

Хүсуси һалда $a = -1$ оларса,

$$J = \int e^{-x} f(x) dx = e^{-x} [f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)] + C.$$

$f(x) = x^n$ оларса,

$$J = \int e^{-x} x^n dx = -e^{-x} (x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!) + C.$$

Бәзи һалларда ниссә-ниссә интеграллама дүстүруну ардыңчыл олараг бир нечә дүфә тәтбиг еткәннән сонра верилмиш интегралны өлү алыныр. Мәсәлән, $J = \int e^{ax} \sin \beta x dx$ интегралында $U = \sin \beta x$, $dV = e^{ax} dx$ ишарә етсәк, $dU = \beta \cos \beta x dx$, $V = \frac{1}{a} e^{ax}$ вә

$$J = \int e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin \beta x - \frac{\beta}{a} \int e^{ax} \cos \beta x dx$$

аларыг. Саг тәрәфти ки интегралла јенидән ниссә-ниссә интеграллама дүстүруну тәтбиг етсәк,

$$U = \cos \beta x, dU = -\beta \sin \beta x, dV = e^{ax} dx, V = \frac{1}{a} e^{ax};$$

$$J = \int e^{ax} \cos \beta x dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos \beta x + \frac{\beta}{a} \int e^{ax} \sin \beta x dx.$$

Сонунчу ифадәни јухарыда нәзәрә алсаг,

$$J = \int e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{1}{a^2} e^{ax} (a \sin \beta x - \beta \cos \beta x) - \frac{\beta^2}{a^2} \int e^{ax} \sin \beta x dx + C$$

вә ја

$$J = \int e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{a^2 + \beta^2} e^{ax} + C.$$

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки,

$$J = \int e^{ax} \cos \beta x dx = \frac{\beta \sin \beta x + a \cos \beta x}{\beta^2 + a^2} e^{ax} + C,$$

Һиссә-Һиссә интеграллама методунун тәтбигинә аид мисаллар кәстәрәк.

Мисал 1. $\int \sqrt{x^2 + a} dx$, ($a > 0$), интегралыны һесапламалы.

■ Бу интегралда U вә dV бир гајда олараг $U = \sqrt{x^2 + a}$, $dV = dx$ шәклиндә сечилір. Онда

$$dU = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad V = x,$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Дикәр тәрәфдән

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} &= \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \sqrt{x^2 + a} dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \\ &= \int \sqrt{x^2 + a} dx - a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| \end{aligned}$$

Беләликлә,

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C \quad \blacksquare$$

Мисал 2. Јухарыдакы мисала аналожи олараг кәстәрмәк олар ки,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| \leq a.$$

Мисал 3. $\int x^k \ln x dx$, ($k \neq -1$) интегралыны һесапламалы.

■ $U = \ln x$, $dV = x^k dx$ ишәрә едиб $dU = \frac{dx}{x}$, $V = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ олдуғуну, һиссә-Һиссә интеграллама дүстүрүндә нәзәрә алсаг,

$$J = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{1}{k+1} \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \left(\ln x - \frac{1}{k+1} \right) + C \quad \blacksquare$$

Мисал 4. $\int P(x) e^{ax} dx$ интегралыны һесапламалы.

■ ($P(x)$ — n дәрәжәли чоһхәдлидир) $V^{(n+1)} = e^{ax}$, $u = P(x)$ ишәрә едиб, үмүмиләшмиш һиссә-Һиссә интеграллама дүстүрүну тәтбиг едәк:

$$V^{(n)} = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad u = P(x), \quad V^{(n-1)} = \frac{1}{a^2} e^{ax}, \quad u'' = P''(x), \dots$$

Бу ифадәләри (3) дүстүрүндә нәзәрә алсаг,

$$J = \int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \frac{P'''(x)}{a^4} + \dots \right) + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 5. $\int P(x) \sin \beta x dx$ интегралыны һесапламалы.

■ $V^{(n+1)} = \sin \beta x$, $u = P(x)$ гәбул едиб вә

$$V^{(n)} = \frac{\cos \beta x}{\beta}, \quad u = P(x), \quad V^{(n-1)} = \frac{\sin \beta x}{\beta^2}, \quad u'' = P''(x), \dots$$

вə с. ифадэлəрини үмүмилəшмиш һиссə-һиссə интеграллама дүстүрүндə Јеринə јазсаг, онда

$$J = \int P(x) \sin \beta x dx = \sin \beta x \left(\frac{P(x)}{\beta} - \frac{P'(x)}{\beta^2} + \dots \right) - \cos \beta x \left(\frac{P'(x)}{\beta} - \frac{P''(x)}{\beta^2} + \dots \right) + C. \blacksquare$$

Мисал 6. $J = \int P(x) \cos \alpha x dx$ интегралы əввəlки мисала аналожи олараг һесаблиныр.

$$J = \sin \alpha x \left(\frac{1}{\alpha} P(x) - \frac{1}{\alpha^2} P'(x) + \dots \right) + \cos \alpha x \left(\frac{1}{\alpha^2} P'(x) - \frac{1}{\alpha^3} P''(x) + \dots \right) \blacksquare$$

Мисал 7. $J = \int x^k \ln^n x dx$. ($k \neq -1$, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) интегралыны һесаблималы.

■ $U = \ln^n x$, $x^k dx = dV$ ишарə етсəк, онда

$$dU = n \ln^{n-1} x \frac{dx}{x}, \quad V = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$J = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^n x - \frac{n}{k+1} \int x^k \ln^{n-1} x dx + C \blacksquare$$

Мисал 8. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) интегралыны һесаблималы

$$\blacksquare J_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \\ = \frac{1}{a^2} \int x \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{1}{a^2} J_{n-1} = \frac{1}{a^2} \int x \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n}$$

Ахырынчы интегралы һесаблимаг үчүн

$$U = x, \quad dV = \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n}$$

ишарə етсəк,

$$V = \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

олдугуну аларыг. Атынан ифадэлəри ахырынчы интегралда нəзəрə алсаг,

$$J_n = \frac{1}{a^2} J_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} J_{n-1}$$

вə ја

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-2)} \cdot \frac{1}{a^2} J_{n-1} \blacksquare$$

Ахырынчы дүстүрə кəтирмə дүстүрү дејилир. Бурада $n \neq 1$ кəтүрүлмəлидир. $n = 1$ слай һалы үчүн

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Бу дүстүрү ардычыл татбиг етсэк,

$$J_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \cdot \frac{x}{a^4(x^2+a^2)^{n-2}} + \dots + \frac{1}{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^{2n}} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Хүсуси ҳалда $n=2$ оларса,

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Гейд. бази ҳалларда интегралларын белгилемасинда, ушунини эвез, еднамаси ва инсез-инсез интеграллам, мет дларынын бир акиси татбиг едлийр.

Масалан, $J = \int e^{\sqrt{x}} dx$, $x = t^2$ эвез етсэк, $dx = 2t dt$

$$J = \int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt$$

элийр. Теанан инсез-инсез интеграллам, мет дулу татбиг етсэк ($U = t$, $dV = e^t dt$),

$$2 \int t e^t dt = 2 (t e^t - \int e^t dt) = 2 (t e^t - e^t) + C$$

ва жа

$$J = 2 (\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C.$$

Инсез-инсез интеграллама дүстүрүдан белгифа етәрәк, интеграллары белсалайы.

Чалышмалар:

Чаваблар:

- $\int x e^{-x^2} dx$, $-\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C.$
- $\int x \ln^2 x dx$, $-\frac{x^2}{2} (\ln x - 1) \ln x + \frac{x^2}{4} + C.$
- $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $x \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$
- $\int x \sin x dx$, $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$
- $\int \arccos x dx$, $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$
- $\int \operatorname{arctg} x dx$, $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$
- $\int \ln(x+a) dx$, $(x-a) \ln(x-a) - x + C.$
- $\int \ln x \sqrt{1+x^2} dx$, $x \ln x (x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$
- $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$, $\operatorname{arctg} x [\ln(|\operatorname{arctg} x|) - 1] + C.$
- $\int \cos(\ln x) dx$, $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$

§ 4 АЛЫРМА МЕТОДУ

Бу методу интеграл алтында $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ функцијасыны $f_i: J \rightarrow \mathbb{R} (i=1, n)$, функцијаларынын чәми шәклиндә көстәрмәк мүмкүн олдугда тәتبиг етмәк мәгсәдәүғундур. Башга сөzlә бу метод

$$\int f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx, \quad x \in J$$

типили интеграллара аиддир.

Мисал 1. $J = \int \frac{x^3}{(a-x)^n} dx, (n \in \mathbb{N}, x \neq a)$ интегралыны һесаблиаын.

■ $x^3 = (a-x)^3 - 2a(a-x) + a^3$ олдугу үчүн

$$f(x) = \frac{(a-x)^3 - 2a(a-x) + a^3}{(a-x)^n} = \frac{1}{(a-x)^{n-3}} - \frac{2a}{(a-x)^{n-2}} + \frac{a^3}{(a-x)^n}$$

олар. Бурада

$$f_1(x) = \frac{1}{(a-x)^{n-3}}, \quad f_2(x) = -\frac{2a}{(a-x)^{n-2}}, \quad f_3(x) = \frac{a^3}{(a-x)^n}.$$

Алырыг ки,

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Бу интегралларын һәр бирини алырыча һесаблиасаг,

$$J_1 = \int \frac{dx}{(a-x)^{n-3}} = \frac{1}{(n-3)(a-x)^{n-2}} + C_1,$$

$$J_2 = \int \frac{2adx}{(a-x)^{n-2}} = -\frac{2a}{(n-2)(a-x)^{n-1}} + C_2,$$

$$J_3 = \int \frac{a^3 dx}{(a-x)^n} = -\frac{a^3}{(n-1)(a-x)^{n-1}} + C_3$$

олар. Онда

$$J = \sum_{k=1}^3 J_k = \frac{1}{(n-3)(a-x)^{n-2}} - \frac{2a}{(n-2)(a-x)^{n-1}} - \frac{a^3}{(n-1)(a-x)^{n-1}} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int \frac{f(x) dx}{(x-a)^n}, (n \in \mathbb{N}, a \neq x)$ һесабламагы.

■ Бурада $f(x)$ функцијасынын Тејлор теореминин шәртләрини өдәдији фәрз олуноур.

Интегралы һесабламаг үчүн $x = a + u (dx = du)$ әвәзләмәсә апарыб, сонра $f(x) = f(u+a)$ функцијасыны Тејлор сырасына алырмаг кифәјәтдир:

$$f(x) = f(a+u) = f(a) + \frac{u}{1!} f'(a) + \frac{u^2}{2!} f''(a) + \dots$$

Онда

$$J = \int \frac{f(x) dx}{(x-a)^n} = f(a) \int \frac{du}{u^n} + \frac{f'(a)}{1!} \int \frac{du}{u^{n-1}} + \frac{f''(a)}{2!} \int \frac{du}{u^{n-2}} + \dots$$

Алынган интегралларын һәр бири чәдвэл интегралыдыр.

Хүсуси һалда $f(x) = P_k(x)$, ($k < n$) чоххәдлеси оларса, бу чоххәдлини

$$P_k(x) = P_k(u+a) = P_k(a) + \frac{u}{1!}P_k'(a) + \frac{u^2}{2!}P_k''(a) + \dots + \frac{u^k}{k!}P_k^{(k)}(a)$$

Тейлор аҗрылышына аҗырдыгдан сонра,

$$J = \int \frac{P_k(x)}{(x-a)^n} dx = P_k(a) \cdot \int \frac{du}{u^n} + P_k'(a) \int \frac{du}{u^{n-1}} + \dots + \frac{P_k^{(k)}(a)}{k!} \int \frac{du}{u^{n-k}}$$

интеграллары асанлыгга һесабылар. ■

Мисал 3. $J = \int \frac{(x^3-2)dx}{(x-1)^5}$ ($x \neq 1$) интегралыны һесабылар.

■ Бурада $P(x) = x^3 - 2$ вә $a = 1$. Јухарыда сөйләнгән гадданы тәтбиг едәк:

$$P(x) = x^3 - 2, \quad P(1) = -1;$$

$$P'(x) = 3x^2, \quad P'(1) = 3,$$

$$P''(x) = 6x, \quad P''(1) = 6;$$

$$P'''(x) = 6, \quad P'''(1) = 6.$$

Онда

$$\begin{aligned} \frac{x^3-2}{(x-1)^5} &= \frac{-1}{(x-1)^5} + \frac{3}{1!} \cdot \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{6}{2!} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{6}{3!} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x-1)^5} + \frac{3}{(x-1)^4} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Беләликлә, алырыг ки,

$$\int \frac{(x^3-2)dx}{(x-1)^5} = \frac{1}{4(x-1)^4} - \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + C. \quad \blacksquare$$

§ 5. САДӘ КӘСРЛӘРИН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Сада кәсрләр дедикдә,

$$\frac{1}{ax+b}, \quad \frac{1}{(ax+b)^m}, \quad \frac{Px+Q}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

шәклдәки кәсрләрн баша дүшмәҗик.

$$J_1 = \int \frac{dx}{ax+b} \quad \text{вә} \quad J_2 = \int \frac{dx}{(ax+b)^m} \quad \text{интеграллары} \quad t = ax+b \quad \text{әвәз-}$$

ләмәси вәсикәсикә биләвәсикә чәдвэл интегралына кәлир. Догрудан да $t = ax+b$ вә $dt = adx$ ифадәләрини интегралларда нәзәрә алсаг,

$$J_1 = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C,$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int t^{-m} dt = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C.$$

Үчүнчү тип садэ кэсрин үмуми шәкилдэ интегралына кә мәздән әввэл $P=0$, $Q=1$ һалына баһаг:

$$J_3 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{4adx}{4a^2x^2+4abx+4ac} = 2 \int \frac{d(2ax+b)}{4a^2x^2+4abx+4ac} = 2 \int \frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^2+4ac-b^2}.$$

Бурада үч һал ола биләр: а) $4ac-b^2 > 0$, б) $4ac-b^2 < 0$, в) $4ac-b^2=0$.
а) $4ac-b^2 > 0$ һалы үчүн $4ac-b^2=k^2$ вә $2ax+b=t$ әввэлмәсәи апарсаг,

$$J_3 = 2 \int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$$

б) $4ac-b^2 < 0$ оларса, $4ac-b^2=-k^2$ вә $2ax+b=t$ әввэлмәсәи апарсаг,

$$J_3 = 2 \int \frac{dt}{t^2-k^2} = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + C$$

вә ја

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C.$$

в) $4ac-b^2=0$ оларса, $2ax+b=t$ әввэлмәсәи апармаг кифәјәтдир. Онда

$$J_3 = 2 \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C = -\frac{2}{2ax+b} + C.$$

Беләликлә,

$$J_3 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & (4ac-b^2 > 0); \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C, & (4ac-b^2 < 0); \\ -\frac{2}{2ax+b} + C, & (4ac-b^2 = 0). \end{cases}$$

Инди исә даһа үмуми һала баһаг:

$$J_4 = P \int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} + Q \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad P, Q, a, b \text{ вә } c \in \mathbb{R}.$$

Бурада икинчи интеграл J_3 харыла hesablanмышдыр. Биринчи интегралы hesabлајар:

$$J_1^* = \int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b - b}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} J_3.$$

Демели,

$$J_4 = PJ_1^* + QJ_3$$

ва ја

$$J = \begin{cases} \frac{P}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(Q - \frac{Pb}{2a}\right) \frac{b}{4ac - b^2} \times \\ \times \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & (4ac - b^2 > 0), \\ \frac{P}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(Q - \frac{Pb}{2a}\right) \frac{1}{b^2 - 4ac} \times \\ \times \ln \left| \frac{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C, & (4ac - b^2 < 0) \\ \frac{P}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(Q - \frac{Pb}{2a}\right) \frac{1}{2ax + b} + C, & (4ac - b^2 = 0). \end{cases}$$

Полн

$$J_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

интегралыны hesabлајн.

$$J_n = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)^n} = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]^n}.$$

Солучу афтоадо $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0$ оларса,

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = k^2, \quad \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} < 0 \text{ оларса, } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = -k^2$$

шаро елач јн

$$x + \frac{b}{2a} = t \text{ взымәснн тәтбиг етск,}$$

$$J_n = \frac{1}{a^n} \int \frac{dt}{(t^2 \pm k^2)^n}$$

интегралыны аларыг кт, бу интеграл үчүн ашағыдалы кәтир-
мә түстүрү мә'лумдур (§ 4):

$$J_n = \frac{1}{2a^n k^2(n-1)} \frac{t}{(t^2 \pm k^2)^{n-1}} \pm \frac{1}{a^n k^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

Бурада

$$t = x + \frac{b}{2a} \text{ вэ } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = + k^2.$$

J_n интегралыны һесабадыгдан сонра

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

интегралыны асанлыгла һесаблаја биләрик.

Догрудан да, $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ эвәз-ләмәләрини апарсаг,

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{P}{a^n} \int \frac{tdt}{(t^2 \pm k^2)^n} + \frac{2aQ-Pb}{2a^{n+1}} \int \frac{dt}{(t^2 \pm k^2)^n}.$$

Саг тәрәфдәки интеграллары һесаблајаг.

Биринчи интеграл $t^2 + k^2 = z$, $2tdt = dz$ эвәзләмәсә вәситәсилә асандыгда һесабланыр:

$$\int \frac{tdt}{(t^2 \pm k^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{2(1-n)z^{n-1}}.$$

Икинчи интегралы исә биз җухарыда кәтирмә дүстуру ки-ми һесабламышыг.

Беләиклә,

$$\begin{aligned} \int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} dx &= \frac{P}{a^n} \cdot \frac{1}{2(1-n)(t^2 \pm k^2)^{n-1}} \pm \frac{2aQ-Pb}{2a^{n+1}} \times \\ &\times \frac{t}{2(n-1)k^2(t^2 \pm k^2)^{n-1}} + \frac{2aQ-Pb}{2a^{n+1}} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}. \end{aligned}$$

Бурада

$$t = x + \frac{b}{2a}, \quad \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = + k^2.$$

Садә кәсрләрин интегралланмасына анд мисаллар көстәрәк.

Мисал 1. $J = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ интегралчыны һесабламалы

$$\blacksquare J_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot J_{n-1}$$

кәтирмә дүстурундан ыстафадә етәк. Бурада $n=3$, $a=1$ ол-дугундан,

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} J_2, \quad J_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} J_1$$

вә $J_1 = \arctg x + C$.

Беләиклә,

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \arctg x + C \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int \frac{5x+8}{x^3-6x+13} dx$ интегралыны һесабламалы.

$$\blacksquare J = \int \frac{\frac{5}{2}(2x-6) + 23}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x-6}{x^2 - 6x + 13} dx + 23 \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 4}$$

Сонунчу интеграллары аҗрылыгда һесаплаҗаҗ.

$$J_1 = \int \frac{2x-6}{x^2 - 6x + 13} dx = \int \frac{d(x^2 - 6x + 13)}{x^2 - 6x + 13} \Rightarrow \ln |x^2 - 6x + 13| + C_1$$

Икинчи интегралда $u = x+3$ әвәзләмәси апараҗ.

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 4} = \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x+3}{2} + C_2$$

Интегралларын бу гыҗмәтләрини верилмиш интегралда җеринә җазсаҗ.

$$J = \frac{5}{2} \ln |x^2 - 6x + 13| + \frac{23}{2} \arctg \frac{x+3}{2} + C. \blacksquare$$

Ч а л ы ш м а л а р:

Ч а в а б л а р:

$$1. \int \frac{dx}{8x^2 - 7x + 5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{11}} \arctg \frac{16x-7}{\sqrt{11}} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\ln \left| \frac{2x+1}{2x+2} \right| + C.$$

$$3. \int \frac{3x+2}{2x^2 + x + 4} dx,$$

$$\frac{3}{4} \ln |2x^2 + x + 4| +$$

$$+ \frac{5}{21\sqrt{31}} \arctg \frac{4x+1}{\sqrt{31}} + C.$$

$$4. \int \frac{(3x+2)}{(x^2 - 3x + 3)^2} dx,$$

$$\frac{13x-24}{3(x^2 - 3x + 3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.$$

$$5. \int \frac{3x-5}{(x^2 - 4x + 7)^2} dx,$$

$$\frac{3}{2(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2 - 4x + 7)} +$$

$$+ \frac{11}{6\sqrt{3}} \arctg \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

$$6. \int \frac{3x+5}{x^2 - 2x + 10} dx,$$

$$\frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x + 10| + \frac{2}{3} \arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

$$7. \int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx,$$

$$\frac{13x - 159}{8(x^2 - 6x + 13)} + \frac{53}{16} \arctg \frac{x-3}{2} + C.$$

III ФӘСИЛ

ЧОХЬӘДЛИНИН ВУРУГЛАРА АҖРЫЛМАСЫ

§ 1. ЧӘБРИ ЧОХЬӘДЛИЛӘРИН ВУРУГЛАРА АҖРЫЛМАСЫ

Тә'риф 1 $z = (x, y) = x + iy$ комплекс сәҗишән, $a_i (i = \overline{0, n})$ ихтиҗари сабит комплекс әдәәләр олоугда,

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

шаكليног функцијаја п дәрәчәли чәбри чоххәдәли (полином) бәјиләр.

Үмуми чәбр курсиндан мә'лум олдуғу киими $P(z)$ вә $Q(z)$ мұхғалиф дәрәчәли чәбри чоххәдәлләрләрсә вә $Q(z)$ -ин дәрәчәси $P(z)$ -ин дәрәчәсиндән бәјик дәрәчәдә, онда

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z) \quad (1)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Бурада $q(z)$ -ин дәрәчәси $P(z)$ илә $Q(z)$ -ин дәрәчәләрн фәрғинә бәрабәрлир, $r(z)$ илә дәрәчәси $Q(z)$ -ин дәрәчәсиндән кичик олан чоххәдәлидир. $P(z)$ бөлүнән, $Q(z)$ бөлән, $q(z)$ гисмәт, $r(z)$ илә галыг чоххәдәлидир.

Тә'риф 2. Истәнилән сабит комплекс әдәдә сыфыр дәрәчәли чәбри чоххәдәли бәјиләр.

Бу һалда ајдынтыр к. т. с. кирилән (сыфырдан фәғли) чоххәдәлиг сыфыр дәрәчәли чоххәдәли бөлүмәк олар.

Тә'риф 3. $P(a) = 0$ оларса, a комплекс әдәдинә $P(z)$ чоххәдәлисинин көкү бәјиләр.

Теорем 1. (Безу)* п дәрәчәли чәбри чоххәдәлини $z - a$ икихәдәлисинә бөлдүкдә алынән галыг, $z - a$ олдуғда бөлүнәннин алдығы гүһмәтә бәрабәрлир.

► Түгәт ки, $P(z)$ сәһиндән п дәрәчәли чоххәдәлидир, бу һалда (1) бәрабәрлијинә кәрә

$$P(z) = (z - a)q(z) + r(z), \quad (2)$$

(2) бәрабәрлијиндә $z = a$ јазсағ, $P(a) = r(a)$. ►

Теорем 2. $z - a$ комплекс әдәди $P(z)$ чоххәдәлисинин көкү оларса, бу чоххәдәли $z - a$ икихәдәлисинә бөлүнәр.

▲ $r(z)$ галыг чоххәдәлисинин дәрәчәси, $z - a$ икихәдәлисинин дәрәчәсиндән кичик олдуғу, үчүн $r(z) = C$ олар. (2) бәрабәрлијинә әсасән

$$P(z) = (z - a)q(z) + C. \quad (3)$$

Бу бәрабәрликтә $z = a$ јазсағ, $P(a) = C = 0$ олар. ►

Тәби оларағ тағшыја сәлә бир сәлә чыха бәдәр.

Истәнилән чәбра чоххәдәлинин көкү вардырмы? Бу сәлә Гаусун исбағ егд јатшағидакы теоремә чаваб вериләр.

Теорем 3. (Гаус).** Дәрәчәси сыфыр олмајан комплекс әмсаллы истәнилән чәбри чоххәдәлинин һеч олмаса бир (һәзиги вә ја комплекс) көкү вардыр.

Бу теоремә чәбри сәс теоремә дәрәчәлир. Бурада теоремин исбатыны вермирик.

* Ғ. Безу (1730—1783) франсыз ришәһијатчысыдыр, Парис Университетини профессору, Фризе Емиләр Академјясынын академиги олмушдур.

** К. Ф. Гаус (1777—1855) алман ришәһијатчысыдыр. О, чәбри әсас теоремини исбатыны, 1799-чу илдә м. дәрәчәли докторлуғ диссертациясы ишләдә вермишдир.

1817-чи илдән өмүрүн ахырынадақ Геттинген расәдханазынын директору вә университетини профессору вәзифәләринә ишләмишдир.

Нәмин теоремдән истифадә едәрәк n дәрәчәли чоххәдлинин n сәйда көкү олдуғуну көстәрәк.

▲ Тутар кн. $P_n(z)$ нәтиҗар n дәрәчәли чоххәдлидир. Чәб-рин әсас теореминә кәрә $P_n(z)$ чоххәдлисинин һеч олмаса бир b_1 көкү вардыр. Онда

$$P_n(z) = (z - b_1) P_{n-1}(z) \quad (3_1)$$

олар. $P_{n-1}(z)$ чоххәдлиси $n-1$ ($n \neq -1$) дәрәчәлидир вә онун һеч олмаса бир b_2 көкү вардыр (теорем 3). Онда

$$P_{n-1}(z) = (z - b_2) P_{n-2}(z) \quad (3_2)$$

олар. $P_{n-2}(z)$ чоххәдлиси $(n-2)$ дәрәчәли чоххәдлидир. Бу мүнәкимәнә давам етдирсәк, аналожн оларар җаза биләрик.

$$P_{n-2}(z) = (z - b_3) P_{n-3}(z), \quad (3_3)$$

$$P_{n-3}(z) = (z - b_4) P_{n-4}(z), \quad (3_4)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_1(z) = (z - b_n) c \quad (3_n)$$

(бурада c сабитдир). $(3_1), (3_2), \dots, (3_n)$ бәрәбәрликләриндән

$$P_n(z) = (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n) \cdot c \quad (4)$$

алынар.

c комплекс әдәди сәйрә бәрәбәр ола билмәз. Әкс һалда $P_n(z)$ чоххәдлиси n дәрәчәли чоххәдли олмәдә.

(4) бәрәбәрлигиндән $P_n(b_1) = P_n(b_2) = \dots = P_n(b_n) = 0$ олмасы ашкардир, җәһин b_1, b_2, \dots, b_n әдәтләринин һәр бири $P_n(z)$ чоххәдлисинин көкүләридир.

(4) бәрәбәрлигиндән көрүнүҗ кимә b_1, b_2, \dots, b_n әдәдләриндән башка $P_n(z)$ чоххәдлисина һеч бир көкү җәхдур.

Беләдликә $P_n(z)$ чоххәдлисина n көкү олдуғуну исбат едик. ►

А) җылдыр кн. (4) бәрәбәрлиги $P_n(z)$ чоххәдлисина хәтти вуруглар аҗрымасыны көстәрик.

Чәб-рән мәлүм сәһиҗ кәм $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ вә $Q_n(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ чоххәдлilәри еҗиниклә бәрәбәр, җәһин $P_n(z) = Q_n(z)$ оларса, $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ олар. Белә исә $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ вә $P_n(z) = (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n) c$ чоххәдлilәринин әмсалларыны тутуштурса, $c = a_n$ олдуғуну көрәрик. $P_n(z)$ чоххәдлисина $a_0 = 1$ оларса, онда она кәтирилиш чоххәдли деҗилр.

Кәтирилиш чоххәдли үчүн (4) дүстуру

$$P_n(z) = (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n)$$

шәклиндә олар.

Јухарыда, истәнилән n дәрәҗәли чохһәдлинин n сәјдә көкү олдуғуну көстәрдик. Мә'лумдур ки, бунларын ичәрисиндә тәкрарланан көкләр дә ола биләр.

Тә'риф 4. $P_n(z) = (z - b)^{\alpha} P_{n-\alpha}(z)$, $P_{n-\alpha}(b) \neq 0$ оларса, b әдәдинә $P_n(z)$ чохһәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкү де-
жилир. b_1, b_2, \dots, b_n әдәоләри $P_n(z)$ чохһәдлисинин уғун олараг $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ тәкрарланан көкләри оларса,

$$P_n(z) = \alpha_0 (z - b_1)^{\alpha_1} (z - b_2)^{\alpha_2} \dots (z - b_n)^{\alpha_n} \quad (5)$$

олар. Бу бәрәбәрлик $P_n(z)$ чохһәдлисинин вуруглара аҗры-
лышыны ифадә етилир. Бурада $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$ олар.

Үмумијјәтлә, истәнилән чохһәдлини вуруглара аҗырмаг үчүн онун көкләрини тапмаг лазымдыр.

(5) бәрәбәрлијиндән төрәмә алсаг,

$$\begin{aligned} P'_n(z) &= \frac{\alpha_1}{z - b_1} \cdot P_n(z) + \frac{\alpha_2}{z - b_2} \cdot P_n(z) + \dots + \frac{\alpha_n}{z - b_n} P_n(z) - \\ &\quad \cdot \alpha_0 (z - b_1)^{\alpha_1 - 1} (z - b_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - b_n)^{\alpha_n - 1} \times \\ &\quad \times [\alpha_1 (z - b_2) \dots (z - b_n) + \alpha_2 (z - b_1) (z - b_3) \dots (z - b_n) + \\ &\quad + \alpha_n (z - b_1) (z - b_2) \dots (z - b_{n-1})]. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) бәрәбәрлијлә көсгәрар ки, b_i -ләр $P_n(z)$ чохһәдлисинин $\alpha_i > 1$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда һәмин әдәдләр $P'_n(z)$ чохһәдлисинин $\alpha > 1$ дәфә тәкрарланан көкү олар.

Демәли, $(z - b_1)^{\alpha_1 - 1} (z - b_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - b_n)^{\alpha_n - 1}$ чохһәдлиси $P_n(z)$ вә $P'_n(z)$ чохһәдлиләринин әи бөјүк ортаг бөләнидир.

Тә'риф 5. һәгиги әмсаллы

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (7)$$

чохһәдлисиндә z -и онун гошмасы олан \bar{z} дәлшәни илә әвәз етмәклә алынан $P_n(z)$ чохһәдлисинә, $P_n(z)$ чохһәдлисинин гошмасы дејилир.

Һәгиги әмсаллы кәтирилмиш (7) чохһәдлисинин мҗһүм бир хассәсини исбат едәк.

Теорем 4 α әдәди һәгиги әмсаллы $P_n(z)$ чохһәдлисинин α дә-
фә тәкрарланан комплекс көкүдүрсә, онда α әдәдинин гошмасы олан $\bar{\alpha}$ әдәди дә һәмин чохһәдлини α дәфә тәкрарланан көкүдүр.

▲ Әввәлчә $P_n(z) - P_n(\bar{z})$ олдуғуну көстәрәк. Доғрудан да
(7) чохһәдлисинин әмсаллары һәгиги олдуғу үчүн, $(z)^n$ ком-
плекс әдәдинин z^n -ин гошмасы олдуғуну көстәрмәк кифәјәт-
дир.

Комплекс әдәдләрин хассәләри дән мә'лумдур ки,

$$(\overline{z_1 z_2}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \quad (8)$$

Бу бахдығымыз һал үчүн $z_1 = z_2 = z$ гәбул етсәк (8) бәрәбәр-
лијинә көрә

$$\bar{z^2} = (\bar{z})^2. \quad (8_1)$$

сөзәндә (8) бәрабәрлнлнндә $z_1 = z^2$, $z_2 = z$ тәсәләтләргә,

$$\overline{(z^2)} = \overline{(z^2)} \overline{(z)} = \overline{(z)}^3. \quad (8_2)$$

Процесс аналогичноларга тавап егдирсәк, истәвилән n үчүн

$$\overline{(z^n)} = \overline{(z)}^n. \quad (8_3)$$

Бу исә $P(z)$ чохәдлисннн, һәгнги әмсаллы $P(\overline{z})$ чохәдлисннн гәшмасы олдуғуну көстәрнр. Јә'нн

$$P(\overline{z}) = P(\overline{z}).$$

Онда

$$P(z) = \overline{P(\overline{z})}. \quad (9)$$

Фәрсетәк кәләтәдәлн верлнмнш һәгнги әмсаллы $P_n(z)$ чохәдлисннн n дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда

$$P_n(z) = (z - a)^n Q(z) \quad (Q(a) \neq 0). \quad (10)$$

(9) вә (10) бәрабәрлнкләрнндән

$$P_n(z) = \overline{(\overline{z} - \overline{a})^n Q(\overline{z})} \quad (11)$$

олар. Дәкәр тәрафтан $\overline{(\overline{z}^n)} = (z)^n$ мүнәснбәтннә әсәсән

$$\overline{(\overline{z} - \overline{a})^n} = \overline{(\overline{z} - \overline{a})}^n = (z - \overline{a})^n. \quad (12)$$

(12) фәрсетә (11) бәрабәрлнлнн ә јерннә јәзсәг,

$$P_n(z) = (z - \overline{a})^n Q^*(z). \quad (13)$$

Бурада $\overline{Q(\overline{z})} = Q^*(z)$ кнмн ншарә еднлнр. $Q^*(\overline{a}) \neq 0$ олдуғуну көстәрсәк, онда n дәдлннн $P_n(z)$ чохәдлисннн n дәфә тәкрарланан көкү олдуғуну нсбат етмнш олар.г. $\overline{Q(\overline{z})} = Q^*(z)$ бәрабәрлнлннә әсәсән $\overline{Q(\overline{a})} = Q^*(\overline{a}) = Q(a)$; $Q(a) \neq 0$ олдуғундан

$$Q^*(\overline{a}) \neq 0. \quad \blacktriangleright$$

§ 2. ҺӘГНГН ӘМСАЛЛЫ ЧӘВРН ЧОХӘДЛННН КӘТНРНЛМӘЛӘН ВУРУТЛАРА АЈРЫЛМАСЫ

Бундан сонра һәгнги дәјншәнәлн чохәдлнләрлә мәшгул олачакымыз үчүн z әвәзнә x һәгнн дәјншәнннн көтүрәчәјнк.

b_1, b_2, \dots, b_m әдәдләрн $P_n(x)$ чохәдлисннн ујғун оларга β_1, \dots, β_m дәфә тәкрарланан һәгнги көкләрн вә $a_1, \overline{a_1}, a_2, \overline{a_2}, \dots, a_r, \overline{a_r}$ әдәдләрн ујғун оларга $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ дәфә тәкрарланан гәшма комплекс көкләрднрсә, онда теорем 4-ә әсәсән

$$P_n(x) = (x - b_1)^{\beta_1} \cdot (x - b_2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x - b_m)^{\beta_m} (x - a_1)^{\lambda_1} (x - \overline{a_1})^{\lambda_1} \times \\ \times (x - a_2)^{\lambda_2} (x - \overline{a_2})^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{\lambda_r} (x - \overline{a_r})^{\lambda_r}, \quad (14)$$

$$[\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r)] = n.$$

ифадә едилір.

$a_k (k=1, i)$ көкләринин һәгиги вә хә]ллә һиссәләрини u_k вә v_k илә ишарә етсәк, $a_k = u_k + iv_k$, $\bar{a}_k = u_k - iv_k$ олар. Истәһилән k үчүн

$$\begin{aligned} (x - a_k)^{\lambda_k} (x - \bar{a}_k)^{\lambda_k} &= [(x - \bar{a}_k)] (x - \bar{a}_k)]^{\lambda_k} = \\ &= [x - u_k - iv_k] (x - u_k + iv_k)]^{\lambda_k} = \\ &= [(x - u_k)^2 + v_k^2]^{\lambda_k} = (x^2 + p_k x + q_k)^{\lambda_k} \end{aligned} \quad (15)$$

алынар Бурада $p_k = 2u_k$, $q_k = u_k^2 + v_k^2$. Б, бәрабәрләји (14)-дә нәзәрә алсаг,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - b_1)^{\beta_1} \dots (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ &\times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нәтичә. Һәгиги әмсаллы чәбри чохһәдди (17) шәклиндә кәтарилмә]н һәгиги вә руғларын һәсия илә ифадә олуңур.

§ 3 ДҮЗКҮН РАСИОНАЛ КӘСРИН САДӘ КӘСРЛӘРИН ЧӘМИ ШӘКЛИНДӘ КӨСТӘРИЛМӘСИ

$\frac{f(x)}{g(x)}$ кәсринин мәхрәч, там расионал функција олмагла

$g(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ шәклиндә вуруғлара а]рылдыгда вә $f(x)$ ис-

тәһилән там расионал функција олдугда, $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ интегралыны илк дәфә 1702-чү илә Лейбниц* һесабламашдыр

Тә'риф 1. Икки там расионал функцијанын нисбәтинә расионал кәср дејилир вә

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

шәклиндә язылыр.

Бундан сонра биз, һәгиги әмсаллы расионал кәсрләрә ба-хачагыг.

* Л. В. Лейбниц (1646—1716) алман ријазиятчысыдыр. Онуң ем-ләрин мұхтәлиф сәһәләриндә (мәсфә, һүгүг елми, ријазият, фи-зикк, тарих, диләһия, һесаблама машыналарына аид вә с) сәмбаллы нә-тичәләрп вардыр

1684-чү илдә диференсиал һесабына, 1685-чы илдә исә интеграл һеса-бына аид чәрықларынн чап етдирмишидир. Бу очеркләрдә илк дәфә оларак диференсиал вә интегралын тәрифләрини вермиш, d диференсиал вә \int интеграл ишарәләрини дәхил етмишлир.

Тэ'риф 2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кэсринэ сурэтин дэрэчэси мэхрэчин дэрэчэсиндэн кичик оларса она дүзкүн, экс һалда дүзкүн олмајан рационал кэср дејилир.

Мәсәлән, $\frac{3x+1}{x^3+x^2+2}$ кэсри дүзкүн, $\frac{2x^2+1}{x+1}$ кэсри исә дүзкүн олмајан кэсрдир.

Чоххэдлини чоххәдлијә бөлмәклә дүзкүн олмајан кэсри, там рационал ифадә илә дүзкүн кэсрин чәми шәклиндә көстәрмәк олар. Мәсәлән, $P^*(x)$ чоххәдлиси m , $Q^*(x)$ исә n дәрәчәли вә $m > n$ оларса,

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = u(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

кими јазмаг мүмкүндүр.

Бурада $u(x)$ рационал ифадә, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ исә дүзкүн рационал кэсрдир.

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} \dots (x - b_m)^{\beta_m} \times (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{\lambda_r} \quad (1)$$

шәклиндә n дәрәчәли чоххәдли олсун.

(1) бәрәбәрлијиндә иштирак едән вуруглардан квадрат үчхәддиләрин һәгиги көкләри јохдур, икихәдли вуругларын исә көкләр, аңчаг һәгигидир.

Теорем 1. Мэхрэчи (1) шәклиндә олан $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кэсрини ашағыда көстәрилән садә кэсрләрин чәми шәклиндә ифадә етмәк олар:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{A_{\beta_1}}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \frac{B_1}{x-b_2} + \\ & + \frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_2}}{(x-b_2)^{\beta_2}} + \dots + \frac{C_1}{x-b_m} + \\ & + \frac{C_2}{(x-b_m)^2} + \dots + \frac{C_{\beta_m}}{(x-b_m)^{\beta_m}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ & + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}x + N_{\lambda_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}} + \\ & + \frac{F_1x + D_1}{x^2 + p_2x + q_2} + \dots + \frac{F_{\lambda_2}x + F_{\lambda_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{\lambda_2}} + \frac{E_1x + L_1}{x^2 + p_rx + q_r} + \\ & + \frac{E_2x + L_2}{(x^2 + p_rx + q_r)^2} + \dots + \frac{E_{\lambda_r}x + L_{\lambda_r}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{\lambda_r}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Бурада

$$b_i, p_i, q_k \in R, (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, r}, k = \overline{1, r}), A_i (i = \overline{1, \beta_i}) \\ B_i (i = \overline{1, \beta_r}), C_i (i = \overline{1, \beta_m}), M_i (i = \overline{1, \lambda_r}), N_i (i = \overline{1, \lambda_r}), \\ F_i (i = \overline{1, \lambda_2}), D_i (i = \overline{1, \lambda_2}), \dots, E_i (i = \overline{1, \lambda_r}), L_i (i = \overline{1, \lambda_r})$$

нэгйги гелри-мүлжлэн сабитлэрдир.

Бу теоремтэ исбат егмэк үчүн эввалчэ ашагыдакы нки лемманы исбат едэк.

Лемма 1. Нэгйги a эдэди $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кэсрийн мэхрэчинин k д.ф. г. крарланан көхүдлэсн, j ний $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ оларса, нэмн кэсри $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = -\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{L(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$ шаклидэ язмал олар. Бурада $Q_1(a) \neq 0, A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}, L(x)$ нсэ нэгйги эмсэлы чоххэдлндир.

◀ Ашагыдакы фэргэ бахаг:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - A Q_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}.$$

A эмсэлын едэ сөцкн, $P(x) - A Q_1(x)$ чоххэдлэн $x-a$ фэргин бөлүнсүн, j ний $P(x) - A Q_1(x) = (x-a) L(x)$ мүнэсбэти өдөнилсн. $P(x) - A Q_1(x)$ чоххэдлэсннн $x-a$ фэргин бөлүмэ, үчүн $P(a) - A Q_1(a) = 0$ эмэсы зэрар в кэфидир (Безу теоремн). Онда A эмсэлын мүнэлн г. эмэт $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ олар. $Q_1(x)$ чоххэдлн $x-a$ нккэдлэсннэ сөлнм дэји үчүн $Q_1(a) \neq 0$ эмэлыдыр. Демэлн, $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ олдулга $\frac{P(x) - A Q_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$ кэсрийн $x-a$ вүрэгүнэ нхтисар едэсн ону $\frac{L(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$ шаклидэ яздыгдан сонра

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{L(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)},$$

олдугуну аларыг. ▶

Нэтичэ. $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ оларса,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}, \quad (3)$$

бурада A_1, A_2, \dots, A_k - гелри-мүлжлэн нэгйги эдэдлэр, $\frac{P_n(x)}{Q_1(x)}$ дүзкүн расионал кэсрдир.

Бурадан $M\alpha + N = E$, $M\beta - L$ олдуғундан

$$M = \frac{L}{\beta}, N = E - \frac{L\alpha}{\beta} \quad (9)$$

эмсаллары јеканэ олараг тэ'јин едилэр. M вэ N (9) ифадэси илэ тэ'јин олунарса, (5) чохэдлиси $x^2 + px + q$ үчхэдлисинэ бөлүнэр. Јэ'ни (7) бэрабэрлији доғру слар.

Белэликлэ, (4) дүстурунун доғру олдуғу исбат едилди. Бурада $Q_1(x)$ чохэдлисинин көклэри $\alpha + i\beta$ вэ $\alpha - i\beta$ эдэдлэр-риндэн фэргли, $P_1(x)$ һэгиги эмсаллы чохэдли, $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}$ кэсри исэ дүзкүн кэсрдир. ►

Бу леммадан ашағыдакы нэтичэ алынар: $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$ оларса,

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \\ &+ \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)} \end{aligned} \quad (10)$$

олар. Бурада M_i вэ N_i ($i = \overline{1, m}$) гејри-мүәјјан һэгиги эдэдлэр-дир. Үчүнчү лемманы n дэ фэ тэтбиг етсэк,

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} + \\ &\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} + \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q)^{m-2} Q_1(x)} + \\ &\dots + \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q) Q_1(x)} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}. \end{aligned}$$

Бу бэрабэрликлэри тэрэф-тэрэфэ тоғлзсаг, (10) дүстуруну алмыш оларыг.

Инди исэ эсас теоремин исбатына кечэк.

Шэртэ көрэ

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ &\times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r}. \end{aligned}$$

Јухарыдакы леммалара эсасэн $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кэсрини

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x - b_1)^{\beta_1} Q_1(x)}$$

шэклиндэ ифадэ етмэк олар. Бурада

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= (x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ &\times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r}. \end{aligned}$$

Биринчи леммадан алынал нәтиҗәгә көрә

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \frac{A_2}{(x-b_2)^{\beta_2-1}} + \dots + \frac{A_{\beta_2}}{x-b_2} + \frac{P_n(x)}{Q_1(x)}.$$

Бурада $Q_1(x) = (x-b_2)^{\beta_2} Q_2(x)$. Дикәр тәрәфлән $Q_2(x) = -(x-b_3)^{\beta_3} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x^2+p_r x+q_r)^{\lambda_r}$,

$$\frac{P_n(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-b_2)^{\beta_2} Q_2(x)}$$

ифадәсинә биринчи леммадан чыхан нәтиҗәни јендән тәтбиг етсәк,

$$\frac{P_r(x)}{Q(x)} = \frac{P_1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \frac{P_2}{(x-b_2)^{\beta_2-1}} + \dots + \frac{P_{\beta_2}}{x-b_2} + \frac{P_n(x)}{Q_2(x)}$$

Беләликлә, $Q(x)$ җохуллини бирд-рәмәли икинәддиләрдән јарыт алат һалда биринчи лемма вә ошдан чыхан нәтиҗәни тәтбиг етмәклә

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \frac{A_2}{(x-b_2)^{\beta_2-1}} + \dots + \frac{A_{\beta_2}}{x-b_2} + \frac{b_1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{C_1}{(x-b_m)^{\beta_m}} + \frac{C_2}{(x-b_m)^{\beta_m-1}} + \dots + \frac{C_{\beta_m}}{x-b_m} + \frac{\psi_l(x)}{Q_l(x)} \quad (11)$$

ахырыг (11) дүсәурунда ахырыгы дүзкүн ахыры мәхрҗәли һалда көсләри јохуру. $Q_l(x)$ анчаг кватрат үч һалда јарыт ебарәтдир вә көсләри хәлалдыр.

$$Q_l(x) = (x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1} (x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2+p_r x+q_r)^{\lambda_r}$$

олдусында, үчүмү леммадан вә бушдан чыхан нәтиҗәни тәтбиг етсәк,

$$\frac{P_l(x)}{Q_l(x)} = \frac{P_l(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1} Q_{l+1}(x)} = \frac{M_l x + N_l}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \frac{M_{l+1} x + N_{l+1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_{l+1} x + N_{l+1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{\psi_{l+1}(x)}{Q_{l+1}(x)} \quad (12)$$

Аналогик оларыг $\frac{P_{l+1}(x)}{Q_{l+1}(x)}$ һалда мисаллы дүзкүн көсрәт үчүн

(12)-гә үзгүн дүсәуру јазә биләрик. Беләликлә, јухарыдакы (11) вә (12) дүсәуруларыны һәл алсаг (2) еңиләјили аларыг. ►

§ 4 ҺӘГИГИ ӘМСАЛЛЫ КӘСРЛӘРИНИ САДӘ КӘСРЛӘРӘ АЈРЫЛМАСЫНА АИД МИСАЛЛАР

1. Их кәср олунмјаг дүзкүн расәонал кәср һалда интегралына кәлһәг:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Чоҳ ҳалларда бу муаллар ашағыдакы тарза ила тағылыр. Белә ки, (3) аҗрылышыны кәсрдән гуртарыб сағ тәрафи x -иң дәрәчәсинә көрә јаздыгдан, сонра сағ вә сот тәрафдағы x -тәрин уҗын дәрәчәләринин әмсалларыны сир-бирләп бәрәбер етиб, ахтарылан A , B вә C мәчһул сабитләринә көрә, үч хәтти тәнлик алырғ вә нәтиҗәлә бу тәнликләр системиндән ахтарылан мәчһуллар тапылыр. (3) еҗнилијини

$$x - 1 = (A - B - C)x^2 + (3C - B)x + (2C - 2B - 4A)$$

шәклиндә јазыб ики чоҳхәдлинин еҗниликлә бәрәбер јәһи шәр тиндән истифадә етсәк,

$$\begin{cases} x^2 & \left\{ \begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ 3C - B &= 1, \\ C - 2B - 4A &= 1 \end{aligned} \right.$$

олар. Бу системи һәлл еттикәдә $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{3}{4}$, $C = \frac{1}{12}$.

җә. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кәсри дүзкүн кәсрдир

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

ва ја

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

$$(1) \quad B - D = 1, \quad (2) \quad A - 5B - C - 4D = 1$$

$$(1) \quad 5B - 4D = -2, \quad (2) \quad 4A - 4B - C - 2D = 1$$

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ 5B + 4D = -2. \end{cases}$$

иңдәкы, тәҗәбә әдәтлә һәһә кәҗләри аар.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} +$$

$$2 \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{x+1} - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+2} - \ln|x+2| + C$$

$$= -\frac{1}{x+1} - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+2} - \ln|x+2| + C$$

3°. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кәсри дүзкүн кәср, мәхрәч тәкрар олунмајан квадрат үчһәдлһләр, онларын көкләри исә комплекс әдәдләрди.

Мисал 3. $\int \frac{x+1}{(x^2-x+2)(x^2+4x+5)} dx$ интегралыны һесабли малы.

■ Икинчи леммаја әсасән,

$$\frac{x+1}{(x^2-x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$$

вә ја

$$x+1 = (Ax+B)(x^2+4x+5) + (Cx+D)(x^2-x+2).$$

са. т. рафи x -ин дәрәжәсин көрә јазсағ,

$$x+1 = (A+C)x^3 + (4A+B+C+D)x^2 + (5A+4B+2C+D)x + (5B+2D),$$

$$\begin{cases} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{cases} \begin{cases} A+C=0, \\ 4A+B+C+D=0, \\ 5A+4B+2C+D=1, \\ 5B+2D=1. \end{cases}$$

системини һәл едәрәк $A=0$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=\frac{1}{3}$ тапы рығ.

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x+1)/x}{(x^2-x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x(x^2+2)} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \\ & = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \\ & = \frac{2}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x+2) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4°. $\int \frac{P(x)dx}{Q(x)}$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кәср, мәхрәч тәк рарланан квадрат үчһәдлһләр, онларын көкләри исә комплекс әдәдләрди.

Мисал 4. $J = \int \frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} dx$ интегралыны һесабла малы.

■ Мәхрәчин тәкрар комплекс көкләри олдуғундан, икин чи леммадан чыхан нәғичәә әсасән,

$$\begin{aligned} & \frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+3}, \\ & x^7+x^5+x^3+x = x^7(C+M) + x^6(D+N) + x^5(A+8C+E+7M) + \\ & + x^4(B+8D+F+7N) + x^3(6A+21C+4E+16M) + \end{aligned}$$

$$+x^2(6B+21D+4F+16N)+x(9A+18C+4E+21M)+ \\ + (9B+18D+4F+12N).$$

Бурадан

$$\begin{array}{l} x^7 \\ x^6 \\ x^5 \\ x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} C+M=1, \\ D+N=0, \\ A+8C+E+7M=1, \\ B+8D+F+7N=0, \\ 6A+21C+4E+16M=1, \\ 6B+21D+4F+16N=0, \\ 9A+18C+4E+12M=1, \\ 9B+18D+4F+12N=0. \end{array} \right.$$

Тэнликлэр системиндэн, $F=D=B=N=0$, $A=-5$, $C=19$, $M=-18$, $E=-20$ табыллар. Бу гыҗматлэри җухарыда нэзэрә алсаг,

$$J = -5 \int \frac{x dx}{(x^2+2)^2} + 19 \int \frac{x dx}{x^2+2} - 20 \int \frac{x dx}{(x^2+3)^2} - 18 \int \frac{x dx}{x^2+3} = \\ = \frac{5}{2(x^2+2)} + \frac{19}{2} \ln(x^2+2) + \frac{10}{x^2-3} - 9 \ln(x^2+3) + C. \blacksquare$$

5°. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ интегралында, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дүзкүн кәсрдир, мәхрәчлә тәкрарланмаҗан һәгиги вә комплекс көкләри вардыр.

Мисал 5. $J = \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2-1)}$ интегралыны һесаблимады.

■ Мәхрәчи мүхтәлиф эки һәгиги $x=1$, $x_2=-1$ вә икки комплекс $x_3=i$, $x_4=-i$ көкү вардыр. Олар кәрә...

$$\frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

вә җә

$$x = A(x-1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2-1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

о ар. Сиг тәрифәтә x -ин һәр чәсинә кәрә җазсаг,

$$x = x^3(A-B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)$$

о ар. Бу еҗниликдән ашағыдакы систем алынар.

$$\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} A+B+C=0, \\ A-B+D=0, \\ A+B-C=1, \\ A-B-D=0. \end{array} \right.$$

Система һәллә егдиклә $A=B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=0$ алынар, бу гыҗматлэри җухарыда нэзэрә алсаг

$$J = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + C. \blacksquare$$

Мисал 6. $J = \int \frac{x dx}{x^3+1}$ интегралыны ҳесаблајын.

■ Мәхрәчи вүруглара ајырсаг $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Көрүнүјү кими мәхрәчин бир һәгиги вә бир тошма комплекс көкү вардыр.

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

вә јә $x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A+B=0, \\ A+B+C=1 \\ A+C=0. \end{array} \right.$$

Бурадан $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| + \\ &+ \frac{1}{6} \int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{3}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Чалышмалар:

Чаваблар:

$$1. \int \frac{(x-1)dx}{x^2(x-2)(x-1)^2} = -\frac{1}{2x} + \frac{5}{4} \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{2}{3(x+1)} + \frac{11}{9} \ln|x+1| + C.$$

$$2. \int \frac{(x+1)dx}{x(x-1)^2} = -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| + C.$$

$$3. \int \frac{(x^2+7x)}{x^3-4x^2-4x} dx = \frac{3}{x-4} - \ln \frac{(x-1)^2}{x^2} + C.$$

$$4. \int \frac{x dx}{x^3-1} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{3}{20} \ln|x-3| + C.$$

$$5. \int \frac{(5x^2-3)dx}{(x-2)(3x^2-2x-1)}, \quad \frac{7}{15} \ln|x-2| + \frac{1}{5} \ln|3x-1| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + C.$$

Бү метод расионал кәсрләрнн интегралланмасынн даһа, саю шәкилдә афат етмәклә, апарылан һесәбламанн к.ф.ә-т ләдәр асанлашдыр.

$P(x) \in (Q(x))$ човин ил илордундун үчкү. Көзгө олордун.

Вспомогательные функции $H(x)$, $U(x)$, $R(x)$ в $V(x)$, соответствующие $P(x)$, $I(x)$ и $J(x)$ определяются условиями $H(x) \equiv 0$, $U(x) \equiv 0$, $R(x) \equiv 0$ и $V(x) \equiv 0$ соответственно.

$$\frac{H(x)}{(x)} = c + \int \frac{P(x) dx}{Q(x)}$$

Тут же в субити комбидисясин таи исрэт шр. Острограцки
 же, $P(x)$ и $Q(x)$ и сдвиги сдвиги, а также в интегралах
 ма сдвиги а также в интегралах сдвиги, а также в интегралах
 сдвиги а также в интегралах сдвиги, а также в интегралах

В. М. Остроградски 1801-чи илгъ индики. Полтвез виллэтилин
сыйгъа кандада знадан олмушдур. Ону бир сыра өлкэлэрия ЕА-на фэхря
сәмиллэр

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

интегралы вериләрсә вә

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m} \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r} \quad (2)$$

оларса, $Q(x)$ вә $Q'(x)$ чоххәдлиләринин ән бөјүк ортаг бөләни олан $U(x)$ чоххәдлисини тә'јин едәк. $Q(x)$ чоххәдлиси (2) бәрәбәрлији илә ифадә олунурса, $U(x)$ -ин дәрәчәси $Q(x)$ -дә иштирак едән вуругларын дәрәчәсиндән бир ваһид аз, јә'ни

$$U(x) = (x - b_1)^{\beta_1 - 1} (x - b_2)^{\beta_2 - 1} \dots (x - b_m)^{\beta_m - 1} \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1 - 1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\lambda_r - 1}$$

олар. $V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)}$ олдуғу үчүн,

$$V(x) = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m)(x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + p_r x + q_r)$$

олачагдыр. $U(x)$ вә $V(x)$ чоххәдлиләри тапылдыгдан сонра (1) дүстуру јазылып. Бурада $H(x)$ вә $U(x)$ чоххәдлиләри һәләлик мүәјјән дејил. $H(x)$ вә $R(x)$ -ин дәрәчәләри, үзгүн олараг, $U(x)$ вә $V(x)$ чоххәдлиләринин дәрәчәләриндән бир ваһид аз гејри-мүәјјән әмсаллы чоххәдлиләрдыр.

Беләликлә, $H(x)$ вә $R(x)$ чоххәдлиләрини гејри-мүәјјән әмсалларла јаздыгдан сонра Остроградски дүстурунун һәр тәрәфиндән төрәмә алып,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{H(x)}{U(x)} \right]' + \frac{R(x)}{V(x)}$$

нәтичәни ортаг мәдрәчә кәтирдиктән сонра сәт вә сол тәрәфдәки кәсрлрин сурәтләринин ејниликлә бәрәбәр отмасындан истифадә едәрәк, мә'лум гајда илә $H(x)$ вә $R(x)$ чоххәдлиләрлә дахил ола гејри-мүәјјән әмсаллары тапырыг. Беләликлә, һәмни чоххәдлиләр тамамла мүәјјән едилыр. Бундан сонра $\int \frac{R(x)}{V(x)} dx$ интегралы асалыгга һесабланыр

Бу дејиләнләри әсасландырмаг үчүн, 1.1.1-н аялајышлар дахил едәк. Әввәлчә ашыгыдыкы теорем, ләбәт едәк.

Теорем. *а комплекс дәдди $Q(x)$ чоххәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, о һәм дә $Q'(x)$ -ин $(\alpha - 1)$ дәфә тәкрарланан көкүдүр. ($\alpha > 1$ олмалыдыр, $\alpha - 1$ оларса, α дәдди $Q'(x)$ чоххәдлисинин көкү дејил).*

◀ Шәрте көрә a комплекс дәдди $Q(x)$ чоххәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкүдүр:

$$Q(x) = (x - a)^\alpha \varphi(x), \quad (\varphi(a) \neq 0).$$

Бу бәрәбәрлијин һәр тәрәфиндән төрәмә алсаг,

$$Q'(x) = \alpha(x - a)^{\alpha - 1} \varphi(x) + (x - a)^\alpha \varphi'(x).$$

$$\alpha \varphi(x) + (x-a)\varphi'(x) = \psi(x) \quad (3)$$

илэ ишарэ етсэк,

$$Q'(x) = (x-a)^{\alpha-1} \psi(x) \quad (4)$$

олар. (3) бəрабэрлижиндэ $\psi(a) - \alpha\varphi(a) \neq 0$ олмасы ашкардыр. Белликлэ, (4) бəрабэрлижи a комплекс эдэдинин $Q'(x)$ чох-
хэдлисинин $(\alpha-1)$ дэфэ гəррарланан көкү олдуғуну көстəрир.

Бундан башга чəбр курсундан бир нечə анлајышы јада салаг.

Тəрриф 1. $f(x)$ вə $\varphi(x)$ чоххəдлилəринин һəр биринин бə-
лундују чоххəдлијə, бу чоххəдлилəрин ортаг бəлəни дејил-
лир.

Тəрриф 2. $f(x)$ вə $\varphi(x)$ чоххəдлилəринин һəр һансы бир
ортаг бəлəни, онларын истəнилəн ортаг бəлунəнинə бəлун-
нурсə, ондə бəјүк ортаг бəлəнə $f(x)$ вə $\varphi(x)$ чоххəдлилəринин
əн бəјүк ортаг бəлəни дејилир вə

$$D = [f(x), \varphi(x)] \quad (5)$$

кими ишарə едиллир.

Онлə, $R(x) = D[f(x), \varphi(x)]$ олар.

Остроградски түстурунда $Q(x)$ вə $Q'(x)$ чоххəдлилəринин
əн бəјүк ортаг бəлəнини тапмаг үчүн Евклид алгоритминдəн
эстифадə едиллир. Бурадə $\varphi(x)$ -ин дəрəчəsi, $f(x)$ -ин дəрəчə-
синин бəјүк дејилдир. $f(x)$ чоххəдлисинин $\varphi(x)$ -ə бəтүкдə
алынан гисмəти $q(x)$, галыгы исə $r_1(x)$ илə ишарə етсəк,

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r_1(x) \quad (6_1)$$

олар. Бурадə $r_1(x)$ -ин дəрəчəsi $\varphi(x)$ -ин дəрəчəсиндəн кичик
олдуғундан $\varphi(x)$ -и $r_1(x)$ -ə бəлə билəрик вə (6₁) түстурунə
этəсəн

$$\varphi(x) = r_1(x)q_1(x) + r_2(x) \quad (6_2)$$

аларыг. $r_2(x)$ галыг чоххəдлисинин дəрəчəsi, $r_1(x)$ -ин дəрə-
чəсиндəн кичик олдуғу үчүн

$$r_1(x) = r_2(x)q_2(x) + r_3(x). \quad (6_3)$$

Просеси бу гəјдə илə давам етдирсəк,

$$r_2(x) = r_3(x)q_3(x) + r_4(x), \quad (6_4)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) + r_k(x) \quad (6_k)$$

алынар. Бу просесдə һəр дэфə галыгын дəрəчəsi һеч олмасы
бир ваһиј əзлмишдыр. Буну истəнилəн k сəјдə апардыг-
дə нəтичəдə $(k+1)$ -чи аддымдə галыг сыфыр дəрəчəли чох-
хəдли олар. Јəни

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_k(x). \quad (6_{k+1})$$

$$\begin{aligned} & 39x^2 - 182x - 195 \\ & 39x^2 - 126x + 27 \\ & 56x - 168 \end{aligned}$$

$r_2(x) = 56x - 168$ ю $(x - 3)$ Инди исә $r_2(x)$ чоҳхәдлиснн $r_2(x)$ -ә бөлсәк, $r_3(x) = 0$ олар. Бу исә о демәкдир ки, $r(x)$ чоҳхәдлисн $r_1(x)$ -ә бөлүнүр. Демәли, $r_1(x) = x - 3$ чоххәдлисн $f(x)$ вә $\varphi(x)$ чоҳхәдлиләрнн н бөжүк ортаг бөләндир.

Мисал 1. $I = \int \frac{3x^4 + 4}{x^3(x^2 + 1)^2} dx$ интегралыны һесаблијаг.

■ $Q(x) = x^3(x^2 + 1)^2$, $U(x) = x^4(x^2 + 1)$, $V(x) = x(x^2 + 1)$ олар. Онда (1) дүстуруна әсәсән

$$\int \frac{3x^4 + 4}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3}{x^3(x^2 + 1)} + \int \frac{B_0x^3 + B_1x + B_2}{x(x^2 + 1)} dx$$

олар. Ахырынчы бәрабарлијин һәр тәрәфиндн тәрәмә алсаг,

$$\frac{3x^4 + 4}{x^3(x^2 + 1)^2} = \left(\frac{A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3}{x^3(x^2 + 1)} \right)' + \frac{B_0x^3 + B_1x + B_2}{x(x^2 + 1)}$$

иә

$$\begin{aligned} & \frac{3x^4 + 4}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4(x^2 + 1)^2}{x^3(x^2 + 1)^2} + \frac{B_0x^3 + B_1x + B_2}{x(x^2 + 1)} \\ & \quad + \frac{B_0x^3 + B_1x + B_2}{x(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

иә иәв ифадәтә сәт тәрәфинн ортаг мәхрәкә кәтирдилән шәра

$$\begin{aligned} & (x^4 + 1) - (3A_0x^3 + 2A_1x + A_3)(x^2 + 1) = (A_1x^2 - A_3x^3 + \\ & A_2x - A_3)(x^2 + 1) + (B_0x^3 + B_1x + B_2)(x^2 + 1) = \\ & = B_0x^3 + (1 - A_1 - B_1)x^2 + (A_2 + B_1)x^2 + \\ & + (B_1 - 3A_3 - A_1)x - (B_2 + 1)x - 1x - 2A_3 \end{aligned}$$

иә иәв ифадәтә сәт тәрәфинн ортаг мәхрәкә кәтирдилән шәра

$$\begin{aligned} & x^4 \left| \begin{array}{l} B_0 = 0, \\ B_1 - A_0 = 0, \\ B_1 - B_2 = 2, \\ A_1 - 3A_3 = B_1 - 1 \end{array} \right. \\ & x^3 \left| \begin{array}{l} B_2 - 4A_3 = 0, \\ A_1 = 1 \end{array} \right. \\ & x^2 \left| \begin{array}{l} 2A_1 = 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = -1, A_4 = 0, B_1 = 1, B_2 = -1, B_3 = 0, B_4 = 0 \\ & 2. B_2 = -1, B_3 = 0, B_4 = 0 \end{aligned}$$

$$J = \int \frac{3x^4 + 4}{x^4(x^2 + 1)^2} dx = \frac{-\frac{11}{2}x^2 - 2}{x^2(x^2 + 1)} = 8 \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = -\frac{11x^2 + 4}{2x^2(x^2 + 1)} - 8 \int \frac{dx}{x} + 8 \int \frac{xdx}{x^2 + 1} = -\frac{11x^2 + 4}{2x(x^2 + 1)} - 8 \ln|x| + 4 \ln(x^2 + 1) + C. \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int \frac{3x^4 + 6x + 4}{(x^3 + 2x - 1)^2} dx$ интегралыны ҳесаблајаг.

■ Бу мисалда $Q(x) = (x^3 + 2x - 1)^2$ ва $Q'(x) = 2(x^3 + 2x - 1) \times (3x^2 + 2)$, онларын эн бөјүк ортаг бөлөн $U(x) = x^3 + 2x - 1$,

$$V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)} = x^3 + 2x - 1,$$

олар.

$$J = \int \frac{3x^4 + 6x + 4}{(x^3 + 2x - 1)^2} dx = \frac{H(x)}{x^3 + 2x - 1} + \int \frac{R(x)}{x^3 + 2x - 1} dx.$$

Маълумдур ки, бурада $H(x)$ ва $R(x)$, дәрҷәләри икідән бөјүк олмајан чоҳнәлилдир.

$$\int \frac{3x^4 + 6x + 4}{(x^3 + 2x - 1)^2} dx = \frac{A_0 x^2 + A_1 x + A_2}{x^3 + 2x - 1} + \int \frac{B_0 x^2 + B_1 x + B_2}{x^3 + 2x - 1} dx$$

бәрабәрлијини һәр икн тәрефидән төрәмә алыб, әввәлки мисалдакы кими һәрәкәт етсәк,

$$\begin{aligned} \frac{3x^4 + 6x + 4}{(x^3 + 2x - 1)^2} &= \frac{(2A_0 x + A_1)(x^3 + 2x - 1)}{(x^3 + 2x - 1)^2} \\ &\rightarrow \frac{-(A_0 x^2 + A_1 x + A_2)(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x - 1)^2} + \frac{B_0 x^2 + B_1 x + B_2}{x^3 + 2x - 1} \end{aligned}$$

олар. Бәрабәрлији сағ тәрефин ортаг мәхрәчә кәтиряб су- рәтләри бәрабәрләшдирсәк:

$$3x^4 + 6x + 4 = B_0 x^3 + (B_1 - A_0)x^2 + (2A_1 + 2B_0 + B_2)x^3 + (2A_0 - 3A_2 - B_0 - 2B_1)x^2 + (2A_0 - B_1 + 2B_2)x + (-A_1 - B_2 - 2A_2),$$

олар ки, бурадан да

$$\begin{cases} x^5 & B_0 = 0, \\ x^4 & B_1 - A_0 = 3, \\ x^3 & B_2 + 2B_0 - 2A_1 = 0, \\ x^2 & 2B_1 - B_0 - 3A_2 - 2A_0 = 0, \\ x^1 & 2B_2 - B_1 - 2A_0 = 6, \\ x^0 & -A_1 - B_2 - 2A_2 = 4 \end{cases}$$

системини аларыг. Бурадан исә $A_1 - B_1 = B_1 - B_2 = 0$, $A_0 = -3$, $A_2 = -2$. Онда

$$J = \int \frac{3x^4 + 6x^2 + 4}{(x^3 + 2x - 1)^2} dx = -\frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 1} + C. \blacksquare$$

Гејд 1. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ интегралында $x^2 + px + q$ вуругу јүксак дәрәчәдән иштирак едәрсә, бу интегралы һесабламаг үчүн адәтән үмуми методдан истифадә едилир. Јә'ни $\frac{P(x)}{Q(x)}$ кәсри садә кәсрләргә ајрылыр вә гејрик-мүәј-јән әмсаллар тапылдыгдан сонра ону „ dx “-ә вуруб интеграллајырлар. Бу һалда һесаблама чох вахт апарыр. Одур ки, бу типли интеграллары Остроградски дүстурундан истифадә едәрәк һесабламаг даһа әлверишлидир.

Мисал 3. $J = \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ интегралыны һесабламалы.

$$\blacksquare Q(x) = (x^4-1)^2, Q'(x) = 3(x^4-1) \cdot 4x^3 = 12x^3(x^4-1)^2.$$

$$U(x) = (x^4-1)^2, V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)} = \frac{(x^4-1)^2}{(x^4-1)^2} = x^4-1.$$

Остроградски дүстуруну тәтбиғ етсәк,

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{ax^7 + bx^6 + cx^5}{(x^4-1)^2} + \frac{dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h}{(x^4-1)^2} + \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \right] dx.$$

Һәр тәрәфдән тәрәмә алсағ,

$$\frac{1}{(x^4-1)^2} = \left[\frac{ax^7 + bx^6 + cx^5}{(x^4-1)^2} + \frac{dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h}{(x^4-1)^2} \right] + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

вә ја

$$1 = (7ax^6 + 6bx^5 + 5cx^4 + 4dx^3 + 3ex^2 + 2fx + g)(x^4-1) + (ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h) \cdot 8x^3 + [A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Mx+N)(x^2+1)](x^4-1)^2. \quad (7)$$

(7) еңилијиндә $x=1$ олдуғда,

$$1 = -8(a+b+c+d+e+f+g+h);$$

$x=-1$ олдуғда,

$$1 = 8(a-b-c-d-e-f-g+h);$$

$x=i$ олдуғда исе,

$$\begin{cases} a-c+e-g = \frac{1}{8}, \\ d-b-f+h = 0 \end{cases}$$

олар. Биринчи ики тәнликдән,

$$b+d+f+h=0, \quad a+c+e+g = -\frac{1}{8}$$

олур. Ашагыдакы системэ бахаг:

$$\begin{cases} b + d + f + h = 0, \\ -b + d - f + h = 0 \end{cases}$$

бурадан, $b + f = d + h = 0$ олар.

$$\begin{cases} a + c + e + g = \frac{1}{8}, \\ a - c + e - g = \frac{1}{8} \end{cases}$$

системиндэн исә $a = e = 0$, $c + g = \frac{1}{8}$ алышыр. Даһа сонра (7) әмсалларыны мүгајисә етсәк:

$$\begin{array}{l} x^4 \left\{ \begin{array}{l} 0 = A - B + M, \\ 0 = 7a - 8a + A - B + N, \\ 0 = 6b - 8b + A + B - M, \\ 1 = -g + A - B - N, \end{array} \right. \quad \text{вә ја} \quad \begin{cases} A + B + M = 0, \\ A - B + N = a, \\ A + B - M = 2b, \\ A - B - N = 1 + g, \\ d = -2h, \\ A - B - M = 2f, \\ A - B + N = 3e, \\ A - B - N = \frac{5e + 7g}{2} \end{cases} \\ x^3 \left\{ \begin{array}{l} 0 = 4d - 8h - A - B - M, \\ 0 = 2f + A + B - M, \\ 0 = 3e + A - B - N, \\ 0 = 5e - g - 8g - 2(A - B - N); \end{array} \right. \end{array}$$

Б. системән $h = d = b = f = e = a = 0$, $c = \frac{7}{32}$, $g = \frac{11}{32}$,

$$A = -\frac{21}{192}, B = -\frac{21}{128}, M = 0, N = -\frac{21}{64}$$

алардан: $\frac{1}{x^4} = -\frac{21}{192} + \frac{21}{128}x^2 - \frac{21}{64}x^4$

$$J = \frac{7x^3 - 11x}{32(x^2 - 1)} + \frac{21}{18} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \arctg x + C. \blacksquare$$

Чалышмалар:

Чаваблар:

$$\begin{array}{ll} 1. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2 - x - 2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \\ 2. \int \frac{dx}{(x-1)^3} = \frac{x}{3(x-1)^2} - \frac{1}{9} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x(x-1)} \right| + C. \\ 3. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \arctg x + C. \\ 4. \int \frac{x^2+3x}{(x-1)(x^2-x-1)} dx = \frac{3x-2}{3(x^2-x-1)} + \frac{1}{9} \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} \right| + \frac{2}{3} \arctg \frac{x}{1-x} + C. \end{array}$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{(x^4+1)^2}, \quad \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} \right| - \\ - \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}, \quad \frac{7x^5-11x}{32(x-1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \operatorname{arctg} x + C.$$

IV ФЭСИЛ

ИРРАЦИОНАЛ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

§ 1. САДЭ ИРРАСИОНАЛ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

[illegible]

1°. Интеграл алдынкы функция $f(x, \sqrt{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}})$ шектүү болса, $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ болушу керек (мында $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — бирдей функциялар, x в $\sqrt{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}$ ден сизингиз ошол функция, m — эң кичинекей натурал саны, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$). Эгерде $\Delta = 0$ оларда, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — мисалы, $\alpha = m, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0$ болса, $\sqrt{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}$ — бул \sqrt{ax} — бул жөнөкөй функция болушу мүмкүн, ошентип, бул интегралды эсептөө оңой болот. Бирок, бул учурда интеграл алдынкы функция бир эле функцияга аспагыраак болушу мүмкүн. Бул учурдагы интегралды негизинен эсептөө оңой болот.

$$\int_0^1 |f(x)|^p \frac{dx}{x^{p-1}}, \quad \text{тегдәлыкә дә әһәмәтшә ырым}$$

1. $\frac{1}{x+3}$ әвәзл.м.әсини апармаг ләзымдыр

Догрудан да,

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}; \quad x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}; \quad d = \frac{m(\alpha\delta - \gamma\beta)t^{m-1}}{(t - \gamma t^m)^2} dt$$

олдугуну интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = m(\alpha\delta - \gamma\beta) \int f\left(t, \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}\right) \frac{t^{m-1}}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt$$

олар. Бу исә рационаллашмыш интегралдыр.

2°. Интегралалты функция

$$f = \left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{s_1}, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{s_2}, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{s_n} \right],$$

бурада $r_1, s_1; r_2, s_2, \dots, r_n, s_n \in \mathbb{N}$, f функцијасы $x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{s_1}, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{s_n}$ аргументләриндән асылы рационал функциядыр.

Интегралы рационаллашдырмаг үчүн $z^s = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ әвәзләмәси апарылып. Бурада s әдәди s_1, s_2, \dots, s_n әдәдләринин ән кичик ортаг бөлүнәнидир. Әвәзләмәдән

$$x = \frac{\delta z^s - \beta}{\alpha - \gamma z^s}, \quad dx = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) s z^{s-1}}{(z - \gamma z^s)^2} dz;$$

$$\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{s_k} = z^{s_k} = z^{s_k}, \quad (k = \overline{1, n})$$

алырыг.

Бурада r_k тәм әдәдир, s әдәди исә $s_k (k = \overline{1, n})$ әдәдләринә бөлүнүр.

Беләликлә,

$$J = (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot s \int f\left(\frac{\delta z^s - \beta}{\alpha - \gamma z^s}, z^{s_1}, z^{s_2}, \dots, z^{s_n}\right) \cdot \frac{z^{s-1}}{(z - \gamma z^s)^2} \varphi(z) dz.$$

$\varphi(z)$ рационал функция олдугундан белә функцияларын интеграллама меголары бундан әвәзлкі фәсилдә верилмиш ир.

Гәјд: Хүсуси һалда $\alpha = \delta = 1, \gamma = \beta = 0$ оларса верилмиш интеграл

$$J = \int f\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$$

пәклинә дүшәр вә $x = z^s$ әвәзләмәси илә рационаллашар.

Мисал 1.

$$J = \int \frac{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{(x-1)^2 \left[\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} \right]} dx$$

интегралыны ҳесаблајар.

■ $\frac{x+1}{x-1} = t^6$ өзвэләмәснндән $x = \frac{1+t^6}{t^6-1}$, $x-1 = \frac{2}{t^6-1}$.
 $dx = -\frac{12t^5}{(t^6-1)^2}$ алырыг. Бунлары интегралда јеринә јазсаг,

$$J = -3 \int \frac{t^4 - t^2}{t^6 - 1} dt = -3 \int \left(t^2 - 2t^2 + 2t^2 - 2 + \frac{2}{t^6 - 1} \right) dt =$$

$$= -3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{2}{3} t^3 + t^2 - 2t + 2 \ln |1 + t| \right] + C. \blacksquare$$

Бурада $t = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$.

§ 2. ЕЈЛЕР* ӨВЭЗЛӘМӘЛӘРИ

Ејлер өзвэләмәләри ила:

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (1)$$

шәклндәки интеграллар расио лаллашдырылар.

Ејлер и биричи өзвэләмәси. $a > 0$ оларса,
 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x \sqrt{a}$ өзвэләмәси (1) интегралды
 фу кејяни расио лал шәклә кәтирр. Өвэләмәдән

$$ax^2 + bx + c = (t + x\sqrt{a})^2 = t^2 + 2tx\sqrt{a} + ax^2,$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}},$$

$$dx = -2 \cdot \frac{V a^2 - tb - c \sqrt{a}}{b - 2t \sqrt{a}} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a} = \frac{t^2 \sqrt{a} - tb + c \sqrt{a}}{b - 2t \sqrt{a}},$$

алынар.

Интегралда x , dx вә $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ јеринә, t -дәи асылы
 гәјмәтләрини јазсаг интеграл расио лаллашар.

* Леонард Ејлер (1707—1783) Невчәрә ријазиятчысыдыр. О
 илк тәјислини Бәзәл кимнәзијасында алмышдыр. О, Бернуллини рәһбәр-
 лији алтанда о дөвр үчүн гәјмәтли олан бир сыра мәсәләләрин һәллиндән
 өтрү 1723-чү илдә елмәр макистри дәрәҗәсини алмышдыр. 1726-чы илдә
 Петербурј ЕА-на дөвәт олунмуш, 1730-чу илдә физика кафедрасынын
 мүдир, 1733-чү илдә иса академик сечилимишдыр.

Мисаллар көстөрөк.

Мисал 1. $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}$ интегралынын hesablamaly.

■ $a = 1, 0$ болгун үчүн $\sqrt{x^2+3x-1} = t + x$ (связлама) апарат. Онда

$$x^2+3x-1=(t-x)^2=t^2+2tx-x^2 \Rightarrow 1-x=\frac{t^2+1}{2t}$$

$$dx = 2 \frac{-t+1}{(3-2t)^2} dt; \quad \sqrt{x^2+3x-1} = \frac{1-3t}{3-2t}$$

олар. Солгунчу ифадэлери интегралда көзгө алсат,

$$J = 2 \int \frac{(3-2t)(1+3t-t^2)dt}{(t^2+1)(1+3t-t^2)(3-2t)} = \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \arctgt + C = 2 \arctgt(\sqrt{x^2+3x-1} - x) + C. \blacksquare$$

Мисал 2. $\int \frac{dx}{1+x^2+a^2}$ интегралынын hesablamaly.

■ $\sqrt{x^2+a^2} = t$ x сөзлөм. (связлама) $a^2 = t^2 - x^2$ $2xt dx = t dt$
 $x dt = t dx = (t-x) dt \Rightarrow 1 = \frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}$ (связлама)

$$\int \frac{dx}{1+x^2+a^2} = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

Бу интегралды башка сөзлөм ифадэлери сырттан көзгө алсат.

Билерин билебиз: $a > 0$ ошондо $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx$ (связлама) апарылат. Жүжүрлөтүр
 гайда илэ $x = \frac{t\sqrt{c-b}}{t^2-1}$

$$dx = 2 \frac{t\sqrt{c-b}}{(a-t^2)^2} dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \left(\frac{t\sqrt{c-b}}{t^2-1} \right) = \frac{t^2\sqrt{c-b}}{t^2-1}$$

олар x, dx апарат ax^2+bx+c ифадэлери t -гө көзгө алсат
 мын г мөтүрүнн интегралды t -гө көзгө алсат интегралды
 $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ функциясы рационалдык функцияга

Мисал 3. $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}$ интегралды hesablamaly

$$\blacksquare \sqrt{x^2+3x-1} = tx \Rightarrow x^2+3x-1 = t^2x^2 \Rightarrow 1 = t^2 - 3t + 1$$

$$x = \frac{2t\sqrt{3+5}}{t^2-1}; \quad dx = 2\sqrt{3+5} \frac{t\sqrt{3+5} - \sqrt{3+5}}{(t^2-1)^2} dt$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} = xt + \sqrt{3} = \frac{t^2 \sqrt{3} + 5t + \sqrt{3}}{t^2 + 1}$$

тапырыг.

Беләиклә,

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 5x + 3}} = 2 \int \frac{dt}{2t \sqrt{3} + 5} - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |2t \sqrt{3} + 5| + C. \blacksquare$$

Бурада

$$t = \frac{\sqrt{-x^2 - 5x + 3} - \sqrt{3}}{x}.$$

Билерин үчүнчү, әвәзләмәси. $ax^2 + bx + c$ үчхәддигини һәгигә көкләри вәрса, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - h)$ әвәзләмәсини апармаг лазымдыр.

Бурада h , квадрат үчхәддигини көкләриндән биридик. Икинчи көкүн k олдуғуну фәрз етсәк,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - h)(x - k)}$$

лар. Әвәзләмәни нәзәрә алсаг

$$\sqrt{a(x - h)(x - k)} = t(x - h), \quad a(x - h)(x - k) = t^2(x - h)^2$$

вә ја

$$a(x - k) = t^2(x - h)$$

лар. Сонунчу бәрәбәрликдән алынан

$$x = \frac{ht^2 - ka}{t^2 - a},$$

$$dx = \frac{a(h - k)}{t^2 - a} dt,$$

$$\sqrt{a(x - h)(x - k)} = t \left(\frac{ht^2 - ka}{t^2 - a} - h \right) = \frac{t(h - k)}{t^2 - a}$$

факторларини (1) интегралында јеринә јазсаг

$$J = \int f \left(\frac{ht^2 - ka}{t^2 - a}, \frac{t(h - k)}{t^2 - a} \right) \frac{a(h - k)}{t^2 - a} dt$$

алырыг ан, бу да рационал функцијанын интегралыдыр.

Мисал 1. $J = \int \frac{dx}{(x - 3)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ интегралыны һесабламы.

■ $x^2 + 2x - 3$ үчхәддигини көкләри 1 вә 3 олдуғу үчүн

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{(x - 1)(x + 3)} = t(x - 1)$$

әвәзләмәси верилмиш интегралы рационаллашдырыр. Догрулада, әвәзләмәдән

$$x + 3 = t^2(x - 1) \text{ вә ја } x = \frac{t^2 + 3}{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{-8t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t - \frac{a^2}{4} \sin 2t + C.$$

эвэллэмэдэн, $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$,

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2},$$

алырыг. Бу гиймэтлэри јеринэ јазсар,

$$J = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \blacksquare$$

Мисал 4. $J = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2}}$ интегралыны һесабламалы.

■ $x = atg t$ ($dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$) эвэллэмэси даһа мүнәсибдир.

Догрудан да,

$$J = \int \frac{1}{a^2(1 + tg^2 t) \sqrt{a^2(1 + tg^2 t)}} \cdot \frac{adt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C.$$

Даһа сонра $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1 + tg^2 t}}$ ејилијиндэ $tg t = \frac{x}{a}$ гиймәтини јазмагла

$$J = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C. \blacksquare$$

1°. Иррасионал ифадәлэри интеграллајан заман, бә'зән һиссә-һиссә интеграллама методуну тәтбиг егмәк лазым кәлир.

Мисал 1. $J = \int \sqrt{ax^2 + b} dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Ашкардыр ки,

$$J = \int \frac{ax^2 + b}{\sqrt{ax^2 + b}} dx = \int \frac{ax^2 dx}{\sqrt{ax^2 + b}} + b \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}.$$

Эввәлчә, һиссә-һиссә интеграллама методуну тәтбиг едәрәк,

$$J_1 = \int \frac{ax^2 dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$$

интегралыны һесаблајар.

$$u = x, du = dx, V = \int \frac{u du}{\sqrt{ax^2 + b}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int (ax^2 + b)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2 + b) = \sqrt{ax^2 + b}.$$

Алынған ифадәлэри J_1 -дә нәзәрә алсар,

$$J_1 = x \sqrt{ax^2 + b} - \int \sqrt{ax^2 + b} dx = x \sqrt{ax^2 + b} - J.$$

Дикер тәрәфдән

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}} \right| + C.$$

J_1 вә J_2 интегралларының бу гыймәтләрини верилмиш интегралда нәзәрә алсар.

$$J = \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 + b} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}} \right| + C. \blacksquare$$

2°. Интеграл алтында $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ифадәси өштирак еклипи һалда бә'зи квадрат үчхәдлилли шәклени дәришдириб сонра исә әвәзләмә апармаг таһа мисәлдәүргә киләр.

Мисаллар көстөрәк.

Мисал 1. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ интегралыны һесабламалы.

■ Квадрат үчхәдлилли ашағыақы кими чевирәк.

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + l \right].$$

Бурада $l = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$, $a > 0$ оларса,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d \left(x + \frac{b}{2a} \right)}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + l}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + \\ &+ \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + l} + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + \\ &+ C - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c}| - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln 2a + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c}| + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Иккинчи һалда $a < 0$ отмага $4ac - b^2 > 0$ оларса, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ифадәсен x -ни һеч бар гыймәтләргә, һәлиги гыймәт ала бильмәз. Бу һа көрәк $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, оңд гә интегралын мисәлсәсиз.

$$b^2 - \frac{4ac}{a^2} = k^2 (x > 0), \quad l = -k^2, \quad k = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

ишәрә етсәк, онда

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + l \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - k^2 \right] = |a| \left[k^2 - \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{4a}} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{k^2 - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4a}} \arcsin \frac{x + \frac{b}{2a}}{k} + C = \frac{1}{\sqrt{4a}} \arcsin \frac{2ax + b}{2ak} + C. \blacksquare$$

Мисал 2. $J_1 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ интегралыны һисапла-
быз.

■ $\int u dv = uv - \int v du$ формуласына кулланыйк.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = u, du = \frac{(2ax + b)dx}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}, dx = dv, v = x;$$

$$J_1 = x \sqrt{ax^2 + bx + c} - \int \frac{(2ax + b)dx}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} = x \sqrt{ax^2 + bx + c} -$$

$$\int \frac{(2ax + b) + \frac{4ac - b^2}{4a}}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = x \sqrt{ax^2 + bx + c} - J_1 +$$

$$+ \frac{b}{4a} \int \frac{(2ax + b) + \frac{4ac - b^2}{4a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = x \sqrt{ax^2 + bx + c} - J_1 +$$

$$\frac{b}{4a} \int \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{4ac - b^2}{4a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Ниж:

$$J_1 = \frac{(2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c}}{4a} + \frac{4ac - b^2}{4a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ахыргыны ифадәләштерәк еңгә интеграл формуласына һе-
бытан интеграл олдуғуну нәзәр алсаг,

$$J_1 = \frac{(2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c}}{4a} + \frac{4ac - b^2}{4a} J$$

яңр. Браз:

$$J = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c}| + C, & a > 0 \text{ оlanda,} \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{2ak} + C, & \left(k = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}\right), a < 0 \text{ оlanda. } \blacksquare \end{cases}$$

$$\text{Мисал 3. } J = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

■ Интегралны функцияда ашиг дагы көмә чевәрмә
олдуғуну:

$$J = \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b) \frac{2aN-bM}{M}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{2aN-bM}{M} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Саг тэрэгдэки биринчи интеграл билаваситэ чэдвэл интегралына кэлир, икинчи исэ 6-чы мисалда һесабадығымыз интеграл олдуғу үчүн $J = \frac{M}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aN-bM}{2a} J_1$.

Бурада $J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. ■

Мисал 4. $J = \int (Mx+N) \sqrt{ax^2+bx+c} dx$ интегралыны һесабламалы.

■ Јенэ дэ интеграл алтында ашағыдакы кими чевирмэ апарсаг,

$$J = \int (Mx+N) \sqrt{ax^2+bx+c} dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int (2ax+b) \sqrt{ax^2+bx+c} dx + \left(N - \frac{bM}{2a}\right) \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$$

олар. Саг тэрэгдэки биринчи интеграл билаваситэ чэдвэл интегралына кэтирилир, икинчини исэ 2-чи мисалда һесабламшыг. Белэликлэ,

$$J = \frac{M}{6a} \sqrt{(ax^2+bx+c)^3} + \left(N - \frac{bM}{2a}\right) J_1 + C. \quad \blacksquare$$

J_1 интегралы 2-чи мисалда һесабланыб.

Мисал 5. $J = \int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$ интегралыны һесаблајаг.

$$\blacksquare J = \int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x-x^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{6-(x-2)^2}}.$$

$x-2=t$ ($x=t+2$, $dx=dt$) эвэзлэмэсини апарсаг,

$$J = \int \frac{(t+2) dt}{\sqrt{6-t^2}} = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} + \int \frac{t dt}{\sqrt{6-t^2}}.$$

вэ ја

$$J = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} + 2 \sqrt{2+4x-x^2} + C. \quad \blacksquare$$

3°. $P_m(x)$, m дэрэчэли чоһхэдли олдугда

$$J = \int \frac{P_m(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (1)$$

типли интеграллары һесабламаг үчүн эввэлчэ

$$J_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (2)$$

интегралыны һесаблајаг. Соңунчу интеграл үчүн кәтирмә (рекуррент) дүстүрү верәк. Садәлик үчүр. $ax^2 + bx + c = y$ илә ишара етсәк,

$$J_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{y}}. \quad (3)$$

Ашагыдакы ифадәнин төрәмәсини алаг:

$$(x^{m-1} \sqrt{y})' = (m-1)x^{m-2}\sqrt{y} + \frac{x^{m-1}y'}{2\sqrt{y}}$$

вә ја

$$\begin{aligned} x^{m-1} \sqrt{y}' &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c) + x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{y}} = \\ &= -ma \frac{x^m}{\sqrt{y}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)b \frac{x^{m-1}}{\sqrt{y}} + (m-1)c \frac{x^{m-2}}{\sqrt{y}}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) б рабблнн һәр ахыт рәфннә интегралласаг,

$$x^{m-1} \sqrt{y}' - maJ_m + \left(m - \frac{1}{2}\right)bJ_{m-1} + (m-1)cJ_{m-2}$$

олар. Ахырынчыны J_m -ә көрә һәлл етсәк,

$$J_m = \frac{1}{ma} x^{m-1} \sqrt{y} - \frac{1}{ma} \left(m - \frac{1}{2}\right)b J_{m-1} - \frac{(m-1)c}{ma} J_{m-2}. \quad (5)$$

(5) ифадәсиндә $m=1$ вә $m=2$ јазмагла,

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{a} \sqrt{y} = \frac{b}{2a} J_0 \text{ вә } J_2 = \frac{1}{4a^2} (2ax + 3b) \sqrt{y} + \\ &+ \frac{1}{8a^2} (3b^2 - 4ac) J_0 \end{aligned}$$

аларыг. Бурада $J_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{y}}$.

Просеси бу гајда илә давам етдирсәк,

$$J_m = Q_{m-1}(x) \sqrt{y} + \lambda J_0 \quad (6)$$

алынар. Бурада $Q_{m-1}(x)$, $(m-1)$ дәрәҗәли чохһәли, λ исә гејри-мүәјјән сабитдир.

Белмәклә, (2) интегралыны (6) дүстүруна әсасән

$$J = \int \frac{P_m(x) dx}{\sqrt{y}} = Q_{m-1}(x) \sqrt{y} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{y}} \quad (7)$$

шәклндә јазә биләрик. Бурада $Q_{m-1}(x)$ гејри-мүәјјән әмсалы, дәрәҗәли $P_m(x)$ чохһәдәлисинин дәрәҗәсиндән бир ваһид азотан чохһәдлн, λ исә гејри-мүәјјән сабитдир.

Мисал 6. $\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$ интегралыны һесаблајаг.

■ Јухарида берилген чыңгажакан $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$ шаклинде олар. (5) дүстүрү түзсөң

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Сонунчу, барабарликти нэр тарафиндан төрөмө алып, ортаг махрача катирликден сонра суретлери барабарлаштырсөк,

$$\frac{x-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2} + (Ax^2+Bx+C) \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

вэ ја

$x^2 + x + 1 = (2Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 1) + \lambda$ олар. Сонунчу, барабарликден ашагыдакы системи аларыг.

$$\begin{cases} x^2 & 3A-1 \\ x^1 & 5A+2B=0 \\ x^0 & 4A+3B+C=-1 \\ x^{-1} & 2B+C+\lambda=-1. \end{cases}$$

Системден $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{5}{6}$, $C = \frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ -и тапыб, бу ги-метлери јухарыда нэзэрэ алсаг,

$$J = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{5}{6} x + \frac{1}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Бурада

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C. \quad \blacksquare$$

4°. $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ шаклида интеграллары һеса-ламаг үчүн лаһа бир методдан истифадэ едвир. Бурада $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ вэзлэмэсини апарсаг, истәнилән $H(x, y)$ чохһәдлисини

$$H(x, y) = W_1(x) + y W_2(x) \quad (8)$$

шаклинде көстөрмөк олар. Бурада $W_1(x)$ вэ $W_2(x)$ чохһә-лилери анчаг x -дән асылыдыр.

Догрудан да,

$$H(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n a_{i,j} y^j \right) x^i = \sum_{i=0}^n (a_{i,0} + a_{i,1} y + a_{i,2} y^2 + \dots + a_{i,n} y^n) x^i =$$

$$\begin{aligned}
& -a_{00} + a_{01}y^2 + \dots + a_{0n}y^n + a_{11}yx + a_{12}y^2x + \dots + \\
& + a_{1n}x^n + a_{21}x^2 + a_{22}x^2y + \dots + a_{2n}x^ny + \dots + \\
& + a_{n0}x^n + a_{n1}yx^n + a_{n2}y^2x^n + \dots + a_{nn}y^nx^n = \\
& = W_1(x) + y\omega_1(x) + y^2\omega_2(x) + \dots + y^n\omega_n(x).
\end{aligned}$$

Эндә:

$$W_1(x) = (ax^2 + bx + c)y^2 + y(ax^2 + bx + c)^2y + \dots$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар. Бу функциялар рациональ функциялар булар.

$$y\omega_1(x) + y\omega_2(x) + \dots + y\omega_n(x) = yW_2(x)$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар. Бу функциялар рациональ функциялар булар.

Индә бу функциялар рациональ функциялар булар. Бу функциялар рациональ функциялар булар.

$$f(x, y) = \frac{W_1(x) + yW_2(x)}{W_1(x) + yW_3(x)} \quad (10)$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар. Бу функциялар рациональ функциялар булар.

$$[W_1(x) - yW_3(x)] [W_1(x) + yW_2(x)] = P_1(x)W_1(x) - y^2W_3(x) - P_1(x)$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар.

$$f(x, y) = \frac{[W_1(x) + yW_2(x)] [W_3(x) - yW_4(x)]}{P_1(x)}$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар.

$$f(x, y) = \frac{P_1(x) + yP_2(x)}{P_1(x)} = \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{yP_2(x)}{P_1(x)} = \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{y^2}{y}$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар. Бу функциялар рациональ функциялар булар.

$$f(x, y) = T(x) + \frac{1}{y} S(x)$$

Бул функциялар рациональ функциялар булар.

$$\begin{aligned}
\int f(x, y) dx &= \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\
&= \int T(x) dx + \int \frac{S(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.
\end{aligned} \quad (11)$$

(11) бəрəбəрлiкiнiн сaғ тərəфиндə иштирак етəн биринчи интеграл, располал функцијанын интегралы олдуғу үчүн асанлыгла һесабуланыр. Әкəр $P_3(x)y^3$ чохһədлисиниң дərəчəsi $P_1(x)$ -иң дərəчəсиндən бəјүк оларса,

$$S(x) = W(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Бурада $W(x)$, $P(x)$ вə $Q(x)$ чохһədлилəрдир. $P(x)$ чохһədлисиниң дərəчəsi $Q(x)$ -иң дərəчəсиндən кичикдир.

$\int \frac{S(x)dx}{y}$ интегралы

$$\text{I} \int \frac{W(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \text{II} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^r \sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$\text{III} \int \frac{(Ax+B)dx}{(ax^2+\beta x+c) \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегралларыннан биринə кəтирилir. Биринчи интегралын ачылышы илə танышыг.

$J = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^r \sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралыны һесабулағ.

Һəлли. $x - \alpha = \frac{1}{t} (x > \alpha)$ илə əвəз етсəк $dx = -\frac{dt}{t^2}$,

$$ax^2 + bx + c = \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}{t^2}$$

олар. $x < \alpha$ олан һал үчүн лə һесабулама аналoжи апарылыр. Белəликлə,

$$J = - \int \frac{t^{r-1} dt}{\sqrt{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}}$$

интегралыны алырыг. Бунун һесабуланмасы биринчи интегралда олдуғу кимидир. Үчүнчү тип интегралы һесабуламаздан габаг бир сыра хүсүсi һаллара баһаг.

1° $J = \int \frac{Ax dx}{(x^2 + \gamma) \sqrt{ax^2 + c}}$ интегралыны һесабуламалы.

Һəлли. $t = \sqrt{ax^2 + c}$ əвəз етсəк, $ax^2 + c = t^2$,

$$x^2 = \frac{t^2 - c}{a}, \quad x dx = \frac{1}{a} \cdot t dt.$$

Атынымш бəрəбəрлiклəri интегралда нəзəрə алсаг,

$$J = \int \frac{Adt}{at^2 + (\alpha\gamma - ac)}$$

интегралыны алағарык, бунун лə һесабуланмасы мəлүмтүр.

Мисал 7. $J = \int \frac{x dx}{(2x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 4}}$ интегралыны һесабуламалы.

■ $t = \sqrt{x^2 + 4}$ өзвэлэм сг апарсаг, $x^2 = t^2 - 4$, $x dx = t dt$.
 Олар. Онда

$$J = \int \frac{dt}{2t^2 - 7} = \frac{1}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{7}{2}}}{t + \sqrt{\frac{7}{2}}} \right| + C =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{\frac{7}{2}}} \right| + C. \quad \blacksquare$$

$$2^\circ. J = \int \frac{A dx}{(ax^2 + \gamma) \sqrt{ax^2 + c}} \quad (12)$$

интегралыны хесабламалы

Нэллн. $\sqrt{ax^2 + c} = xt$ өзвэл етсэк, $x^2 = \frac{c}{t^2 - a}$, $x dx =$
 $= -\frac{ct dt}{(t^2 - a)^2}$; $\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{t dt}{(t^2 - a)^2} \cdot \frac{1}{x^2 t} = -\frac{dt}{t^2 - a}$ Олар. Онда

$$J = - \int \frac{A dt}{t^2 + (ac - \gamma a)}$$

альнар. Бу интегралын хесабланмасы ашкардыр.

Мисал 8. $J = \int \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 4}}$ интегралыны хесабламалы.

■ $\sqrt{x^2 + 4} = xt$ өзвэл етсэк, $x^2 = \frac{4}{t^2 - 1}$, $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{dt}{1 - t^2}$, $J =$
 $= \int \frac{dt}{t^2 - 7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + \sqrt{7}} + C. \quad \blacksquare$

3°. $J = \int \frac{Ax + B}{(x^2 + \gamma) \sqrt{ax^2 + c}} dx$ интегралы

$$J = J_1 + J_2 = \int \frac{A x dx}{(x^2 + \gamma) \sqrt{ax^2 + c}} + \int \frac{B dx}{(x^2 + \gamma) \sqrt{ax^2 + c}}$$

интегралларыны чэмнэ бэрэбэрдиір ки, буңларың да һәр би-
 рини } харыда хесабладыг. Инди нсэ даһа үмуми олан

$$J = \int \frac{(Ax + B) dx}{(x^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (13)$$

(β² - 4αγ < 0, a > 0)

интегралыны (12) интегралына кәтирмәк мүмкүнлүр. Догру-
 дыңа,

1. э: α = β² - b оларса, $x = \frac{b}{2a} + z$ өзвэләмәси (13) интег-
 ралыны (10) интегралы шәклинә кәтирир.

1

2. 11 1 67 1

Одна из задач — разработка системы показателей, позволяющей

әвезләмәси апармаг дазымтыр. Онда

олар ки, бу типли интеграллары јухарыда несабланышыг. ■

сабламалы.

■ $x = \frac{pz+q}{z+1}$ авзлэмэснн, апарсаг p вэ q гeйри-мүэjжэн саб тлэрннн

68

Т. 1. 1. 1.

$$I = \frac{1}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{5x^2 - 12x - 8} - (x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2 - 12x - 8} + (x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}} \right| + C$$

1. $x > 1$ болы үчүндүр.

$z = 1$ өткөзө ($x < 1$).

$$I = \frac{3}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{z^2 + 4} - \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2 + 4} + \sqrt{\frac{7}{2}}} \right| + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{z + \sqrt{7}} + C.$$

$$z = \frac{x-2}{x-1}, \quad \sqrt{z^2 + 4} = \frac{\sqrt{5x^2 - 12x - 8}}{x-1}$$

0-ду пазара алсаг,

$$I = \frac{3}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{5x^2 - 12x - 8} - (x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2 - 12x - 8} + (x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}} \right| + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x^2 - 14x + 8}{(x-2)^2 \cdot 7}} + C. \blacksquare$$

Верилмиш интегралы x -ли бүтүн гыжмэтлөринлэ һесаблилат. Инди исэ даһа үмуми олан

$$J = \int \frac{W(x)dx}{(x-a)^r \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегралыны һесаблијаг. Әввәлчә $r > 1$ олан һәлә баһаг. Онда интеграл

$$J = \frac{Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + \dots + C}{(x-a)^{r-1}} + \frac{D}{ax^2+bx+c} + D \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

шәклинә дүшүр. Бурада A, B, C, \dots, D сабитләри гејри-мүәјјән әмсаллардыр.

Мисал 11. $J = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3} dx$ интегралыны һесабламамы.

$$J = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+1}} dx = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} \sqrt{x^2+1} + C \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Алынмыш бәрабәрлији дифференциалласаг,

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+1}} &= \frac{Ax+B}{(x-1)^2} \sqrt{x^2+1} + C \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} \\ &+ \frac{2Ax+B}{(x-1)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{C}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Онда

$$x^2+1 = -x^2(2A+B+C) - x(A+B+2C) - (A+2B+C),$$

$$\begin{cases} x^2: & 2A+B+C=1, \\ x^1: & A+B+2C=0, \\ x^0: & A+2B+C=1 \end{cases}$$

системни аларыг. Системән исэ $A=B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$ олду-гу тапылыр. Беләликлә,

$$J = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{(x-1)^2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}. \blacksquare$$

Ахыры ғы интеграл $x-1 = \frac{1}{t}$ әвәлчә мәнвлә һесабланыр.

$$J = \int \frac{W(x)dx}{(ax^2+bx+c)^r \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегралыны һесаблијаг. Бурада $W(x)$, дәрәжә $2r$ -дән кичәк олан чохәддидир, ax^2+bx+c үчхәддисинин исэ комплекс

көкләри вардыр. Јә'ни $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, $r = 1$ олдугда $W(x)$ бир дәрәҗәли чохәдди олар ки, бу һала да бахмышыг. $r > 1$ олан һалда

$$\int \frac{Ax^{2r-3} + Bx^{2r-4} + \dots + C}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^{r-1}} \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + c} + \int \frac{(Dx + E)dx}{(\alpha x^2 + \beta x + c) \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + c}},$$

бурада A, B, \dots, C, D, E гејри-мүәјјән әмсаллардыр. Сағ тәрәфдәки ахырынчы интегралыч һесаблинмасыны исә билирик.

§ 3. ЕЈЛЕР ӘВӘЗЛӘМӘЛӘРИНИН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

Ејлерин әвәзмәләрини, онун һәндәси шәрһиндән дә асанлыгла алмаг олар. Доғрудан да,

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + c}) dx. \quad (1)$$

Интеграл алтында јерләшән ашағыдакы икитәртибли әјријә баһаг:

$$y = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + c} \text{ вә } \text{ја } y^2 = \alpha x^2 + \beta x + c, \quad (2)$$

бурида (x, y) нөгтәси әјрини чари нөгтәсидир.

(1) интегралынын рационаллашдырылмасы мәсәләси, (2) икитәртибли әјрисини x вә y чари координатларынын, һәр һансы параметрдән асылы рационал шәкилдә көстәрилмәси илә ејикүчлү үр.

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн (2) әјриси үзәриндә гејд олунмаш ихтијари (α, β) нөгтәсини көтүрәк. Бу нөгтә әјри үзәриндә олдуғу үчүн (2) тәнлијини өтәмәлидир. Һәмийн нөгтәдән тәнли кәсәнин тәнлији $y - \beta = t(x - \alpha)$ олар.

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 + \beta x + c, \\ y - \beta = t(x - \alpha) \end{cases}$$

системиндән x вә y -и тапг. Онда

$$[\beta + t(x - \alpha)]^2 = \alpha x^2 + \beta x + c$$

вә јә

$$2\beta t(x - \alpha) + t^2(x - \alpha)^2 = \alpha x^2 + \beta x + c - \beta^2. \quad (3)$$

Дикәр тәрәфдән билирик ки,

$$\beta^2 = \alpha\alpha^2 - b\beta + c. \quad (4)$$

(4)-ү (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$2\beta t(x - \alpha) + t^2(x - \alpha)^2 = \alpha(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) \quad (5)$$

олар. $(x - \alpha)$ -ја ихтисар етсәк,

$$2\beta t + t^2(x - \alpha) = \alpha(x + \alpha) + b,$$

$$x(t^2 - \alpha) = \alpha\alpha + b - 2\beta t - \alpha t^2,$$

$$x = \frac{\alpha(\alpha - t^2) + b - 2\beta t}{t^2 - \alpha} = -\alpha + \frac{b - 2\beta t}{t^2 - \alpha} = r(t). \quad (6)$$

1) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ интегралы $\frac{1}{x}$ - нәр:

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C$$

(7)-чи кәсәнин тәңлијиндә нәзәрә алсаг,

$$y = \beta - \alpha + r(t) = s(t). \quad (8)$$

Кәсәнин

$$y = \beta - t(x - a)$$

тәңлијиндән

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - \beta = t(x - a) \quad (9)$$

эвәт мәсәл 1) $\frac{1}{x^2}$ интегралы $\frac{1}{x}$ - нәрәләшәдир. Догрудан

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(t, \sqrt{a}) dt$$

Фәрәсәк ки $ax^2 + bx + c$ сүңләтәләр, вә әкәтәкәләр, гиләкәкү вәр. Бәләмәтәр $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ охун, йәни $\frac{1}{x^n}$ вә $\frac{1}{x^n}$ сүңләтәләр. Бәләмәтәр $\frac{1}{x^n}$ сүңләтәләр, мәсәл $\frac{1}{x^2}$ сүңләтәләр, вә $\frac{1}{x^3}$ сүңләтәләр.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - a)$$

шәклдә олар. Бәләмәтәр $\frac{1}{x}$ сүңләтәләр, вә $\frac{1}{x^2}$ сүңләтәләр. Бәләмәтәр $\frac{1}{x}$ сүңләтәләр, вә $\frac{1}{x^2}$ сүңләтәләр. Бәләмәтәр $\frac{1}{x}$ сүңләтәләр, вә $\frac{1}{x^2}$ сүңләтәләр. Бәләмәтәр $\frac{1}{x}$ сүңләтәләр, вә $\frac{1}{x^2}$ сүңләтәләр.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c} = tx \quad (10)$$

олтәгилү аларыг ки, бу да Ејлерин үчүнчү эвәләмәсидир.

Нәһәјәт, Ејринин сонсуз узатлашымын нәггәсини α ; β нәггәсини һесап етмәклә Ејлерин биринчи эвәләмәсини алмәг олар.

§ 4. БИНОМИАЛ ДИФЕРЕНЦИАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНЫМАСЫ

$$x^m (a + bx^n)^p dx \quad (1)$$

шәклиндә ифадәлә биномиал дифференциал дегитир. Бәјүк рус алимни П. Л. Чебышев, (1) ифадәсини интегралынын елементар функциялар васитәсидә ифадә ол ямасы һаггыла ашагыдакы теоремни исбат етмишдир.

Теорем.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (2)$$

интегралы

1) $p \in \mathbb{Z}$ там әдәд олдугда;

* Пафнугыј Львович Чебышев (1821 - 1894) көркәмли рус ријазиятчысыдыр. 1847-чи йлдә Петербург университетинә дәвәт олунуш, бурадә "Мүгајисәләр нәзәријәси" адлы докторлуқ диссертәсиясын мұдафия етмишдир.

1859-чу йлдә Петербург ЕА-нын академики сенилмишдир. О ејни заманда Берлин (1871), Болония (1873), Парис (1874), Иевчә (1893) вә с. ЕА-нын фәхри үмә, сенилмишдир.

2) $\frac{m+1}{-}$ там эдэд олдугда;

3) $\frac{m+1}{n} \in p \in Z$ там эдэд олдугда, элементар функци-
лар наситасилл ифадэ едиллр.

« $a \neq 0$ və $b \neq 0$ olduğunu fərz edək. Bu şərtlərdən hər hansı biri ödənilməzsə, onda (2) integralı hədəvə integralı olar. p , m və n eyni vaxtda tam ədədlər olarsa, onda (2) integralı rasyonallıq fəadənin integralı olar ki, belə integralları hesablamağı biliirik.

Биринчи Һалың исбаты. m, n кәсірләринин үзүмнә мәҗрәһини λ илә ишрә едәк. Бу Һалда $x = t'$ әвәзләмәси (2) интегралыны расионаллаштырар.

Догрудаң да, $m = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $n = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $x = t^m = t^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}$, $y = t^n = t^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}$.

$$x^n = t^{n'} = t^{\frac{n \cdot \alpha_{\text{H}}}{\alpha_{\text{H}}}} = t^{\alpha_{\text{H}}}; \quad dx = \alpha_{\text{H}} t^{\alpha_{\text{H}}-1} dt,$$

бура μ , ν μ , ν там сыр. Бу ифадэләри (2) интегралында яз-
саг.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int t^{-1} (a + bt^{1/n})^p t^{1/n-1} dt$$

Ч. р. P ва λ тэм μ оол p олдугу үчүн бу интеграл расио-
ту башмыны нг биричи хал исбат олүд.

[illegible]

(2) 用欧几里得范数范数, 对 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 有

$$dz = nx^{n-1} dx, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz, \quad x^m = z^{\frac{m}{n}}$$

1. $\{ \sigma_i \}$ sind $(\frac{n}{2})$ - σ -Eigenschaften

$$I = \frac{1}{i} \int_{\gamma} z^{\frac{m}{n}-1} (a+bz)^p dz = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (a+bze^{i\frac{2\pi}{n}})^p e^{i\frac{m-1}{n}2\pi} dz$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (a+bz)^p z^q dz.$$

$$q = \frac{n}{p} \quad \text{with } p \text{ prime and } p \nmid n.$$

Тех. дд. $\frac{m+1}{n}$ там элдэд оларса, $a + bx^n = a + bz = t^s$ эвээ-
д татрэг (2) д тегрэг н расноталдшар. Дотрхдан д.
2 тегрэгилд $a + bx^n = t^s$ эвээлэмэси апарсаг,

$$x = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}(t^s - a)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \cdot \frac{1}{n}(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1} s t^{s-1} dt.$$

олар Бу гыяметлэри (2)-дэ јеринэ јазсаг,

$$J = \frac{s}{n \sqrt[n]{b^{m+1}}} \int (t^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1} t^{r+s-1} dt,$$

Бурада $r \in \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n}$ икк шартга көрө там экидир. Бөлө
ликлэ, икинчи һал үчүн (2) интегралыны рационаллашдыгы
ны исбат етдик.

Үчүнчү һалын исбаты. $\frac{m+1}{n} + p$ сыфыр вэ ја там эдэд
дирсэ вэ $ax^n + b = t^s$ (вэзл м с) (2) интегралыны рационал
лаштырыр. Эвэзлэмэдән

$$x^n = \frac{a}{t^s - b}, \quad a = bx^n - x^n t^s = \frac{at^s}{t^s - b}, \quad x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{t^s - b}},$$

$$(a + bx^n)^p = \frac{a^p t^p}{(t^s - b)^p}, \quad dx = \frac{s \sqrt[n]{a} t^{s-1} (t^s - b)^{\frac{1}{n}-1}}{a(t^s - b)^{\frac{p}{n}}} dt$$

алырыг. Бу ифадэлэри (2) интегралында јазсаг,

$$\begin{aligned} J &= \int x^n (a + bx^n)^p dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{m+1}{n}+p} \int \frac{t^r (t^s - b)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1} dt}{(t^s - b)^{\frac{m}{n}} (t^s - b)^p (t^s - b)^{\frac{p}{n}}} = \\ &= -\frac{s}{a} a^{\frac{m+1}{n}+p} \int \frac{t^{r+s+1}}{(t^s - b)^{\frac{m}{n}+p+1}} dt. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Ғејд. Јухарыла сөјләдијимиз үч һалын һеч бири өдөнилмәдиңдэ (2)
интегралы элементар функциялар вәситәсилә ифадә едилмир.

Ашағыдакы мисаллары һәлл едәк:

Мисал 1. $J = \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^3} dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} dx$ интег्रा-
лыны һесабламалы.

■ $p = -3$, $m = n = \frac{1}{2}$ ошунга үчүн $x = z^2$ ($dx = 2z dz$) эвэзлө-
мәси апармиг ләзәм тыр:

$$J = 2 \int \frac{z^2 dz}{(1+z)^3} = 2 \int \frac{z^2 - 1 + 1}{(1+z)^3} dz = 2 \int \frac{z^2 - 1}{(1+z)^3} dz + 2 \int \frac{dz}{(1+z)^3} =$$

$$= 2 \int \frac{(z-1-2)dz}{(1-z)^2} = 2 \int \frac{dz}{(1+z)^2} = 2 \int \frac{dz}{1+z} \\ 4 \int \frac{dz}{(1+z)^2} + 2 \int \frac{dz}{(1-z)^2} = 2 \ln|1+z| + \frac{4}{1+z} \\ - \frac{1}{(1+z)^2} + C = 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + \frac{4}{(1+\sqrt{x})} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + C. \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2} = \int x^{-1} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx$ интегралыны Һесапламалы.

■ $P = 2$, $m = -1$, $n = \frac{1}{3}$, m вә n кәсрләринин ортаг мәхрәчи 3 олдуғу үчүн $x = z^3 (dx = 3z^2 dz)$ әвәзләмәси верилмиш интегралы расконал шәклә кәтирир:

$$J = 3 \int \frac{dz}{z(1+z)^2} = 3 \int \frac{1+z-z}{z(1+z)^2} dz = 3 \int \frac{dz}{z(1+z)} \\ = 3 \int \frac{dz}{(1+z)^2} = 3 \int \frac{1+z-z}{z(1+z)} dz = \frac{3}{1+z} = 3 \int \frac{dz}{z} - 3 \int \frac{dz}{1+z} + \frac{3}{1+z} = \\ = 3 \ln|z| - 3 \ln|1+z| + \frac{3}{1+z} + C = 3 \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \right| + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + C. \blacksquare$$

Мисал 3. $J = \int x^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ интегралыны Һесапламалы

■. Верилмиш интегралда $m = 3$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$ вә $s = 2$, $\frac{m+1}{n} = 2$ там олдуғу үчүн $1-x^2 = z^2$ әвәзләмәсини апарсаг, сәдә

$$x^2 = z^2 - 1, x = \sqrt{z^2 - 1}, dx = \frac{z}{z^2 - 1} dz,$$

$$J = \int z^2 (z^2 - 1) dz = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{3} z^3 + C =$$

$$= \frac{1}{5} V(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} V(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C. \blacksquare$$

Мисал 4. $J = \int \frac{\sqrt{(1+2x^3)^2}}{x^6} dx = \int x^{-6} (1+2x^3)^{\frac{2}{3}} dx$ интегралыны Һесапламалы.

■. Ашкардыр ки, $m = -6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$, $s = 3$ вә

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-6+1}{3} + \frac{2}{3} = -1.$$

$$x = \frac{1}{1-t}; \quad dx = -\frac{t^2 dt}{1-t^2}; \quad x = \frac{1}{1-t^2}$$

Вд

$$J = \int x^{-6} (1 + 2x)^3 dx \quad x = 1 + \frac{1}{t}$$

$$= \int \frac{1}{(t^2 - 2)^3} dt = C$$

Мы не можем интегрировать $\int \frac{1}{(t^2 - 2)^3} dt$ по формулам, так как они не являются элементарными.

■ $m = 1, n = 2, p = \frac{1}{2}, q = 2, \frac{m}{a} = \frac{1}{a}$ — один из интегралов $a^2 - x^2 = t^2$ — возьмем для подсчета.

$$x^2 = a^2 - t^2, \quad x = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad dx = -\frac{tdt}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

$$J = \int x^{-1} (a^2 - x^2)^{-1/2} dx = \int \frac{tdt}{t(a^2 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2 - a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a^2 - x^2 - a}{a^2 - x^2 + a} \right| + C. \quad \blacksquare$$

Чалышмалар:

Чаваблар:

$$1. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx, \quad 2. \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}, \quad \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} - x}{\sqrt[4]{1+x^4} + x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

$$4. \int \frac{x-a}{x^3} dx, \quad -\frac{3x^2}{2a^2x(a+x^2)^3} + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx^2}}, \quad -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{ax} + C.$$

§ 5. АБЕЛ* ЭВЭЗЛЭМЭСИ

Бу эвэзлэмэ

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}}} \quad (1)$$

(1) интегралында

$$y = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

олар $(\sqrt{y})' = t$ эвэзлэмэснээр

$$t = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{y}} \quad (3)$$

олар.

Эвэзлэмэ (3) квадрат, үүсгэлтэй хэрэгт оруулбал,

$$4t^2y = (y')^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2. \quad (4)$$

(2) эвэзлэмэ, нэр тэрэгний $4a$ -яа нуруу алына. Эвэзлэмэ (4) бэрэбэрлэлийн чыхсаг

$$4(a-t^2)y = 4ac - b^2 \quad (5)$$

Эвэзлэмэ (5) факторлогч y -г алына. Эвэзлэмэ бэрэбэрлэлийн хэрэгт оруулбал, үүсгэлтэй хэрэгт оруулбал,

$$y^n = \left(\frac{4ac - b^2}{4} \right)^n \cdot \frac{1}{(a - t^2)^2} \quad (6)$$

Эвэзлэмэ (3) бэрэбэрлэлийн эвэзлэмэ $t\sqrt{y} = ax + \frac{b}{2}$ дифференциалласаг:

* Нильс-Хенрих Абел (1802-1829) Норвег ринципчигчидыг 1813-а, 1814-а олоо университетэд охуудуу вахт, бей дэрэгдэлтэй тэмдэглэлтэй илэ мөшгүл олмуудур 1825-1826-а иллэрдэ бир сыра арга чиглэлдэ, о чүмлэгдэн дэ хэрэгдэл олмуш, бурада багында Абел функцилары адланг функцилары багында яадына мемуарыны Парис да эмиссийн тэдм етминшдир 1827-1828-а иллэрдэ эллиптик функцилары эвэзлэсн, 1829-ау илдэ нсэ чэри тэмдэглэлт хэлли багында эвэзлэмэ мемуары нэр стан милдир Абел аз мүддэт дэлгэмэсн багында эвэзлэмэ олоркл, ринцип анализн бүтлш эвэзлэмэ ад мүкөммэл эвэзлэмэ яамындыр.

вә ја

$$\sqrt{y} dt - t^2 dx = a dx$$

$$\sqrt{y} dt = (a - t^2) dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{dt}{a - t^2}.$$

(7)

6) вә (7) бәрәбәрликләриндән

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{a^2 - t^2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^n (a - t^2)^{n-1} dt.$$

Онда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{a^2 - t^2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^n \int (a - t^2)^{n-1} dt.$$

Сағ тәрәфдәки интегралалты ифадә чоххәдлидир. Демәли, верилмиш интеграл Абел әвзләмәси илә чоххәдлинин интегралланмасына кәтирилди

Хүсуси һалда $n=1$ оларса,

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \frac{4}{4ac - b^2} \cdot \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + C$$

Гейдәтәкки, $J = \int \frac{(Mx + N)dx}{(Vax^2 + bx + c)^{2n+1}}$ интегралынын һесабы

ланмасы, бундан әввәл һесабыланмыш интеграла кәтирилди

$$\begin{aligned} \text{Дәғруданда да } J &= M \int \frac{xdx}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}} + N \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}} = \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b - b)}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}} dx + N \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}} = \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}} + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Бәрәбәрлијин сағ тәрәфдәки бәрәбәрли интегралы һесабыламағ үчүн $ax^2 + bx + c = z [dz = (2ax + b)dx]$ әвзләмәси апарсағ,

$$\begin{aligned} \int \frac{(2ax + b)dx}{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}} &= \int \frac{dz}{z^{2n+1}} = \int z^{-2n-1} dz = \\ &= \frac{z^{-2n}}{-2n} = \frac{1}{-2n} \cdot \frac{1}{z^{2n}} = \frac{1}{-2n} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}. \end{aligned}$$

Нәтиҗәдә

$$= \frac{M}{a(1-2n)} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^n \int (a - t^2)^{n-1} dt.$$

Ахырынчы интегралы јухарыда һесабламышыг. Бурада

$$t, \quad \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

У ФӘСИЛ

ТРАНСЕНДЕНТ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

§. 1. СИНУС ВӘ КОСИНУСЛАРЫН ЫСИЛЛӘРИ ИШТИРАК ЕДӨН ФУНКСИЈАЛАРЫН ВӘ ВӘЗИ ТРАНСЕНДЕНТ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ.

$f_1(x) = \sin mx \cos nx$, $f_2(x) = \sin mx \sin nx$, $f_3(x) = \cos mx \cos nx$
шәклиндә олан функцијаларын интегралланма-
сы. Бурада мәктәб курсундан мә'лум олан

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (1)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad (2)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (3)$$

дүстурларын тан истифадә едәчәјик.

$J_1 = \int \cos mx \cos nx dx$ интегралыны һесабламаг үчүн, (1)
дүстурундан истифадә етәчәјик.

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \cos(m-n)x dx + \frac{1}{2} \int \cos(m+n)x dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C, & m \neq n \text{ олдугда} \\ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} + C, & m = n \text{ олдугда} \end{cases}$$

Ејни рајда илә (2) дүстуруну тәғбит етсәк, $J_2 = \int \sin mx \sin nx dx$.

$$J_2 = \frac{1}{2} \int \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int \cos(m+n)x dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C, & m \neq n \text{ олдугда} \\ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} + C, & m = n \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Аналоги оларга

$$J_3 = \int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int \sin(m-n)x dx + \frac{1}{2} \int \sin(m+n)x dx$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos(m-n)x}{2(n-m)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C, & m \neq n \text{ олдугда} \\ -\frac{\cos 2nx}{4n} + C, & m=n \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Бэзи трансцендент функцијаларын интегралланмасы.

$$J = \int P_n(x) f(x) dx \quad (4)$$

интегралына бахаг.

Бурала $P_n(x)$ чоһөдлеси n дәрәжәлидир. Ашағыдакы пәлләра бахаг.

1° $f(x) = \ln \varphi(x)$.

■ $\varphi(x) > 0$ функцијасы рационал функцијадыр.

и $\ln \varphi(x)$, $dV = P_n(x) dx$ әвз етсәк,

$$dV = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx, \quad V = \int P_n(x) dx = Q_{n+1}(x) \quad (5)$$

(5)-и (4)-дә нәзәрә алыг,

$$J = \int P_n(x) \ln \varphi(x) dx = Q_{n+1}(x) \ln \varphi(x) - \int Q_{n+1}(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx.$$

Җаңгы $Q_{n+1}(x)$ функцијалары рационал функциялар олар ашағыдакы рекуррент формула олар.

$$2^\circ f(x) = \arcsin x \text{ олдура } n = 0 \text{ и } \sin x \text{ олдура } dV = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$dV = P_n(x) dx, \quad V = \int P_n(x) dx = Q_{n+1}(x)$$

әвзләмәләрини (4)-дә нәзәрә алыг

$$J = Q_{n+1}(x) \arcsin x - \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ахларыңгы интегралы рационал функциялар (V) формула әвз (7) ■

3° $f(x) = \arccos x$ олдура,

$$J = Q_{n+1}(x) \arccos x + \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

интегралыны аларыңгы ашағыдакы рекуррент формула әвзләмәләрини.

4° $f(x) = \operatorname{arctg} x$ олдура и $\operatorname{arctg} x$

$$dV = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad dV = P_n(x) dx = Q_{n+1}(x)$$

әвезлэмәләрindən сонра

$$J = Q_{n-1}(x) \operatorname{arctg} \varphi(x) - \int \frac{Q_{n-1}(x) \varphi'(x)}{1 + \varphi^2(x)} dx$$

интегралыны аларыг ки, интегралалты функция рационал ол-
уг, үчүн бундан һесаблинамасы ашкардыр.

$f(x) = \operatorname{arctg} \varphi(x)$ оларса, дөрдүнчү һала уңун олараг һе-
саблама апарам.

§ 2. $f(\sin x, \cos x)$ шәклиндә функцияларын интегралланмасы

Бурада $f(u, v)$ функциясы u вә v дәјишәнләринин расно-
нал функциясыдыр. $f(u, v)$ функциясында u дәјишәнини $-u$
илә әвәз етдикдә $f(-u, v) = -f(u, v)$ оларса, онда бу функ-
сија u -ја нәзәрән тәк, $f(u, -v) = f(u, v)$ оларса, u -ја нәзәрән
чүт функциядыр. Ејни гајда илә $f(u, v) = -f(u, v)$ оларса,
 $f(u, v)$ функциясы v дәјишәнинә нәзәрән тәк, $f(u, -v) =$
 $-f(u, v)$ оларса, һәммин v дәјишәнинә нәзәрән чүт функция-
дыр.

$f(u, v)$ функциясында һәр икни дәјишәни u вә v илә
әвәз етдикдә $f(-u, -v) = f(u, v)$ оларса, онда функция һәр
еклә дәјишәнә кәрә чүт функциядыр.

$f(u, v)$ функциясы рационал функция олдуғу үчүн, он-
ун чоххәддәлини нисбәт шәклиндә кәсәтмә мүнәсирләүр.

$$f(u, v) = \frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} \quad (1)$$

Бунда $\varphi(u, v)$ вә $\psi(u, v)$ функцияларды u вә v тәң асылы-
лаһ, ондә әләр $f(u, v) = f(u, v)$ олдуғу нисбәт (1)-дә

$$\frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} = \frac{-\varphi(u, v)}{\psi(u, -v)} \quad (2)$$

2) бәрабәрләјинә тәрәф тәң өләр әвәз етмә тәғбир

$$\frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} = \frac{\varphi(u, v) - \varphi(u, -v)}{\psi(u, v) - \psi(u, -v)} \quad (3)$$

Бурада

$$\varphi(u, v) = a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + \dots + a_{n-1} v + a_n \quad (4)$$

$u \in (0, \pi)$, $v \in (-1, 1)$ асылы мүнәсирләүр. (4) бәрабәр-
ләндә v -ни $-v$ илә әвәз етсәк,

$$\varphi(u, -v) = a_0 (-v)^n + a_1 (-v)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (-v) + a_n \quad (4_1)$$

Әл (4) вә (4₁) бәрабәрләјинә тәрәф-тәрәф чылаһ,

$$\varphi(u, v) - \varphi(u, -v) = a_1 [v^n - (-v)^n] + a_2 [v^{n-1} - (-v)^{n-1}] + \dots +$$

$$+ a_{n-1} [v - (-v)] + (a_n - a_n). \quad (5)$$

(6) бəрəбərлижиндə $k-2m$ оларса, $v^k - (-v)^k$ фəрглəри сыфра бəрəбər олур. Демəли, $\varphi(u, v) - \varphi(u, -v)$ чоххəдлисиндə v -нин анчаг тək дэрəчəси иштирак едər. Бу халда

$$\varphi(u, v) - \varphi(u, -v) = \varphi_1(u, v) \cdot v. \quad (6)$$

$\varphi_1(u, v)$ функцијасында v -лөр анчаг чүт дэрəчəдэн иштирак едир. Јə'ни,

$$\varphi_1(u, v) = F(u, v^2) \quad (7)$$

(6) вə (7)-дэн

$$\varphi(u, v) - \varphi(u, -v) = F(u, v^2) \cdot v. \quad (8)$$

Аналоги олараг кəстəрмək олар ки, $\psi(u, v) - \psi(u, -v)$ чоххəдлисиндə v анчаг чүт дэрəчəдэн иштирак едир. Јə'ни

$$\psi(u, v) - \psi(u, -v) = \Phi(u, v^2) \quad (9)$$

(3), (8) вə (9) бəрəбərликлəрини (2)-дə нəз рə алсаг,

$$f(u, v) = \frac{\varphi(u, v)}{\varphi(u, v)} = \frac{\varphi(u, v) - \varphi(u, -v)}{\varphi(u, v) + \varphi(u, -v)} = \frac{F(u, v^2)v}{\Phi(u, v^2)} = \chi(u, v^2) \cdot v. \quad (10)$$

Бурада $\chi(u, v^2)$ функцијасы u вə v^2 -ындан асылы расионал функцијадыр.

Əвəлчə $\lg \frac{x}{2} = t$, $\pi < x < \pi$ универсал əвəзлəмəси вəсиктəсилə

$$J = \int f(\sin x, \cos x) dx \quad (11)$$

интегралынын расионаллашмасы мəсəлəсини өјрөнək. Əвəзлəмəдэн

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

олар. Дикər тэрəфдэн билирик ки,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

x , dx , $\sin x$ вə $\cos x$ -ни бу гыжмэтлəрини (11)-дə нəзэрə алсаг,

$$J = \int f \left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right] \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \varphi(t) dt$$

олар. Бурада $\varphi(t)$ функцијасы t дəжишəнинə нəз рən расионал функцијадыр.

Универсал əвəзлəмə, $f(\sin x, \cos x)$ шикалли бəтүн функцијаларын интегралыны һесабламаға имкан версə дə, бə'зи халларда бу һесаблама чох вахт тəлəб едир. Белə олдургда башга əвəзлəмəлэр сечмəклə мəгсəдə даһа тез лəвə олмат олар. Ашағыдакы халлары нəзəр дн кечарək.

1. $\int f(\sin x, \cos x) dx$ интегралын $a, \cos x$ функциясыны $\cos x$ илэ өзгөрткөндө, интегралды функция ишарасын дэжишэрсэ, \int ни

$$f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$$

аларса, $t = \sin x$ өзгөрткөсү илэ интеграл рационаллашар. Догрудан да, $f(\sin x, \cos x)$ функциясы $u = \sin x, v = \cos x$ дэжишэлэриндэн асылы рационал функция болдугундан

$$f(\sin x, \cos x) = f(u, v) = \frac{\varphi(u, v)}{\psi(u, v)} = \frac{F(u, v^2)v}{\Phi(u, v^2)} = \\ = \chi(u, v^2) \cdot v = \chi(\sin x, \cos^2 x) \cos x$$

Беләликлә интегралалты функция $\chi(\sin x, \cos^2 x) \cos x$ шәклинә дүшәр аэ $t = \sin x (dt = \cos x dx)$ өзгөрткөсү илэ веркитмиш интеграл рационаллашар

$$J = \int f(\sin x, \cos x) dx = \int \chi(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx = \\ = \int \chi(t, 1-t^2) dt = \int \chi_1(t) dt.$$

$\chi_1(t)$ функциясы t -дән асылы рационал функциясыдыр. Белә интегралларын һесабыласы тәсә мәлүмдүр. Хүсуси һалда $J = \int \sin^m x \cos^{n-1} x dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$) аларса, интегралалты функция $\cos x$ -ә нәзәрән тәк функция болду үчүн $t = \sin x$ өзгөрткөсү веркитмиш интегралы рационаллаштырыр. Көргүдән да

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2, dt = \cos x dx$$

болдугуну нәзәрә алсар,

$$J = \int \sin^m x \cos^{n-2} x \cdot \cos x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^{n-1} \cos x dx = \\ = \int t^m (1-t^2)^{n-1} dt$$

алдыр ки, \int да рационал функциялар интегралы болду үчүн, асанлыгга һесабылар.

2. $f(\sin x, \cos x)$ функциясы $\sin x$ функциясыны $-\sin x$ илэ өзгөрткөндө,

$$f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$$

аларса $t = \cos x (dt = -\sin x dx)$ өзгөрткөсү апарылар.

$$f(\sin x, \cos x) = \varphi(\sin^2 x, \cos x) \sin x$$

болду үчүн

$$J = \int \varphi(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx = \int \varphi(1-t^2, t) (-t) dt = \\ = - \int \varphi(1-t^2, t) dt = \int \varphi_1(t) dt.$$

бурада $F(t)$ —рационал функциядыр.

Жаңа $x = \frac{1}{t}$ деп алсак, анда $dx = -\frac{1}{t^2} dt$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} + 1} = - \int \frac{dt}{1 + t^2} = - \arctg t + C = - \arctg \frac{1}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = - \arctg \frac{1}{x} + C.$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} + 1} = - \int \frac{dt}{1 + t^2} = - \arctg t + C = - \arctg \frac{1}{x} + C.$$

$$\frac{2}{3} \arctg \frac{3t+4}{3} + C = \frac{2}{3} \arctg \frac{\frac{x}{2} + 4}{3} + C. \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int \frac{\cos x dx}{\sin x - \cos^2 x}$ интегралды есептеме.

$$\blacksquare f(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x}{\sin x - (-\cos x)^2} = - \frac{\cos x}{\sin x - \cos^2 x} = -f(\sin x, \cos x)$$

олдугу үчүн $t = \sin x$ өзлөмсө алармаг логичтүү. $dt = \cos x dx$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ ифадэлериин интегралда негизге алсак,

$$J = \int \frac{dt}{t - (1 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2 + t - 1} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2t - 1 - \sqrt{5}}{2t + 1 + \sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \sin x - 1 - \sqrt{5}}{2 \sin x + 1 + \sqrt{5}} \right| + C. \blacksquare$$

Мисал 3. $J = \int \frac{3 \sin x dx}{2 \cos x + \cos^2 x + 3 \sin^2 x}$ интегралды есептеме.

$$\blacksquare f(-\sin x, \cos x) = \frac{3(-\sin x)}{2 \cos x + \cos^2 x + 3(-\sin x)^2} = - \frac{3 \sin x}{2 \cos x + \cos^2 x + 3 \sin^2 x} = -f(\sin x, \cos x)$$

олдугу үчүн $t = \cos x$ өзлөмсө алармаг логичтүү. Онда $dt = -\sin x dx$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$, $J = \int \frac{dt}{2t^2 - 2t + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - t + \frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{2t - 1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{2 \cos x - 1}{\sqrt{5}} + C. \blacksquare$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2t - 1 - \sqrt{5}}{2t - 1 + \sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \cos x - 1 - \sqrt{5}}{2 \cos x - 1 + \sqrt{5}} \right| + C. \blacksquare$$

Мисал 4. $J = \int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$ интегралыны ҳесаблимамы.

■ Ҷохласат кәрэрнә ки, $f(\sin x, \cos x) = f(\sin x, \cos x)$.
Онда, $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәси илә

$$J = \int \frac{1}{a + b \operatorname{tg}^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{a + b \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x \right) + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 5. $J = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$ интегралыны ҳесаблимамы.

■ Бу мисалда $f(\sin x, \cos x) = f(\sin x, \cos x)$ олдуғундан, $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләсәк, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

$\sin^4 x = \frac{t^4}{1+t^2}$ вә бунылары интегралда нәзәр алсам,

$$J = \int \frac{(1-t^2) dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + C$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C. \quad \blacksquare$$

§ 3. КӘТИРМӘ ДҮСТУРЛАРЫ

Кәтирмә дүстурлары әсасән һисса-һисса интеграллар мәктәбү вәсикәснә чығарылды. Түгәт ки,

$$1. \quad J_n = \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

интегралыны ҳесаблимамы тәләб олунур $u = \sin^{n-1} x$ $dv = \sin x dx$ ашарә етсәк, $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$ олдуғуну $\int u dv = uv - \int v du$ дүстурунда җазар.

$$J_n = \int \sin^n x dx = \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos x dx$$

$$= \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx.$$

Һәмә һәмә ахырынчы интегралы сол тәрәфә кәчирәк

$$J_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (2)$$

алынар. (2) дүстур кәтирмә дүстур алдымыр. Ахырынчы интеграл (1) типин интеграл олмагла, бурада интегралалты функцияны тәрәсәси ики вәһид азалдымыр. Јенә дә (2) интегралы үчүн җухарыдағы процес тәкәр әтсәк, ики һәддә алынар ки, бунылардан бири интегралсыз, икәри һәсә интегралла олмагла дәр чәси јенидән ики вәһид азалдымыр олар. Про-

сеси бу гајда илэ давам етдирсэк, ахырынчы интеграл² n чүт олдугда $\int dx$, n тэк олдугда исэ $\int \sin x dx$ шаклиндэ олар.

(1) интегралына аналожи оларар:

2. $J_n = \int \cos^n x dx = \int \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ олдуғуну көс-төрмөк олар.

3. $J_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$ интегралыны hesаблајыг.

$$\begin{aligned} \text{Нәлли. } J_n &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x d(\operatorname{tg} x) = J_{n-2} + \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}. \end{aligned}$$

Ејни гајда илэ

$$J_n = \int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}.$$

4. $J_n = \int \sec^n x dx$, $n \geq 2$.

Нәлли. $J_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$ кимі јазыб хиссә-хиссә интеграллама дүстүруну тәтбиг етсәк,

$$\begin{aligned} u &= \sec^{n-2} x, \quad du = (n-2) \sec^{n-3} x \cdot \sec x \operatorname{tg} x dx; \\ dv &= \sec^2 x dx, \quad v = \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Онча

$$\begin{aligned} J_n &= \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - \\ &- (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - \\ &- (n-2) J_{n-2} + (n-2) J_n. \end{aligned}$$

Групплашдырма апарыб J_n -ни тапсар:

$$J_n = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}.$$

олдуғуну аларыг.

Ејни гајда илэ көс-төрмөк олар ки,

$$J_n = \int \operatorname{cosec}^n x dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{ctg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}.$$

5. $J_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$, $m \neq 1$; $n, m \in \mathbb{N}$.

Нәлли,

$$J_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx = - \int \frac{\sin^{n-1} x d(\cos x)}{\cos^m x},$$

чөвирмәсиндән сонра хиссә-хиссә интеграллама дүстүруну тәтбиг едәк:

$$u_1' \sin^n x \, du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \quad d\left(\frac{\sin^n x}{\cos^m x} \right)$$

$$v = \frac{\cos^{1-m} x}{1-m}, \quad J_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx =$$

$$= \left[\frac{\sin^{n-1} x}{(1-m) \cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{1-m} \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{m-1} x} dx \right]$$

вә ја

$$J_{n,m} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} J_{n-2,m-1}$$

Ејни гајда илэ кәстәрмәк олар ын.

$$J_{n,m} = \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} J_{n-2,m-1}$$

$$6. J_{n,m} = \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Һәлли.

$$J_{n,m} = \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x \cos^m x} dx =$$

$$\left[\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos^m x} + \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^{m-2} x} \right]$$

вә ја

$$J_{n,m} = J_{n-2,m} + J_{n,m-2}$$

Ү. $J = \int \sin^k x \cos^n x \, dx$ өскә аңлатса, $k, n \in \mathbb{N}$ һәм k, n оң саннар. Үчүн һәһәл олар җәһәтләр: $k \geq 2$ һәм $n \geq 2$ һәм $k=1$ һәм $n=1$.

1°. $m=1$ һәм $n=1$ өскә аңлатса, $J_{n,m} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

$$J_1 = \int \sin^0 x \cos^1 x \, dx = \int \sin^0 x \cos^1 x \sin x \, dx$$

$$\int [1 - \cos^2 x] \cos^1 x \sin x \, dx = \int \cos^1 x \left[1 - k \cos^2 x + \frac{k(k-1)}{2} \cos^4 x \right]$$

$$\frac{k(k-1)(k-3)}{3!} \cos^3 x + \dots + (-1)^k \cos^k x \Big| \sin x \, dx$$

$$\int \cos^k x \sin x \, dx = -k \cos^{k-1} x \sin x \, dx +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} \cos^{k-2} x \sin x \, dx + \dots + (-1)^k \cos^{k-2k+1} x \sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{k}{k} \cos^{k+3} x - \frac{k(k-1)}{k(k-1)} \cos^{k+5} x +$$

$$+ \dots + (-1)^k \frac{\cos^{n-2k+1} x}{n-2k+1} + C.$$

.. Бу, n мүсбэт тэк олан халдыр:

$$J_2 = \int \sin^m x \cos^{2k-1} x dx.$$

Бундан эввэлки мисала аналожн оларат

$$J_2 = \frac{\sin^{2k-1} x}{2k-1} - \frac{k}{2k-1} \sin^{2k-3} x + \frac{k(k-1)}{2} \frac{\sin^{2k-5} x}{2k-5} - \dots + \frac{k-1}{2} \frac{\sin^{2k-3} x}{2k-3} + C$$

алар:

3. $m = n = 2k, k \in \mathbb{N}$ болгонда интегралды ф. б. с. и. ики шәкилдә ола билар:

а) интегралда тригонометриялык функциялардын косинус олмагач, оларды синус алууга мүхт. а. ф. дур. Әк-р, синус олмагач, оларды косинус алууга мүхт. а. ф. дур. Онда $t = \operatorname{tg} x$ вә $t = \operatorname{ctg} x$ вә т. м. с. интегралды ф. б. с. и. и. билар.

б) интегралда тригонометриялык функциялардын косинус олмагач, оларды синус алууга мүхт. а. ф. дур. Әк-р, синус олмагач, оларды косинус алууга мүхт. а. ф. дур. Онда $t = \operatorname{tg} x$ вә $t = \operatorname{ctg} x$ вә т. м. с. интегралды ф. б. с. и. и. билар.

1 ејд. интегралда тригонометриялык функциялардын косинус олмагач, оларды синус алууга мүхт. а. ф. дур. Әк-р, синус олмагач, оларды косинус алууга мүхт. а. ф. дур. Онда $t = \operatorname{tg} x$ вә $t = \operatorname{ctg} x$ вә т. м. с. интегралды ф. б. с. и. и. билар.

Үчүнчү халын а) вә б) бәндлринә аид мисаллар һәлл едәк.

$$J = \int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2l+2} x} dx \quad (k, l \in \mathbb{N}, l \geq k) \text{ интегралыны һесабла-}$$

малы.

Һәлли. $m = 2k, n = (2l+2), m+n-2k-2l-2 = -2(l-k)+2$ мәнфи чүт әләд олугу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ вәзләмәсә апармаг лазымдыр. Онда

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

олугуну интегралда нәзәрә алсар,

$$J = \int \frac{(\sin^2 x)^k}{(\cos^2 x)^{l+1}} dx = \int \frac{t^{2k}}{(1+t^2)^{l+1}} dt.$$

$(1+t^2)^{l+1-k}$ ифадәсини бином кими ачылдан сонра интеграл едәдә һесабланыр.

Мисал 1. $J = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$ интегралыны һесабламы.

■ $m=4, n=6, m+n-2k-2l-2 = -4$ олугу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ вәзләмәсә апармаг лазымдыр. Бу һәлл үчүн

$$J = \int \frac{t^4(1+t^2)^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^4(1+t^2) dt = \\ = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \quad \blacksquare$$

$$2. J = \int \frac{\sin^{2k+1} x}{\cos^{2l+1} x} dx, \quad k, l \in N, l > k.$$

Нәлли. $m = 2k+1$, $n = 2l-1$; $m+n = 2(l-k)$ м нфи чүт әдәд олдуғу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәсини апарсаг,

$$J = \int \frac{(\sin^2 x)^k \sin x}{(\cos^2 x)^l \cos x} dx = \int t^{2k+1} (1+t^2)^{l-k-1} dt.$$

Бу интегралын һесаблинамасы мәлүм түр.

Мисал 2. $J = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ интегралыны һесаблинамлы.

■ $m = 3$, $n = 5$, $m+n = 8$ мәнфи чүт әдәд олдуғу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәсини апармаг ләзим түр:

$$J = \int \frac{t^3(1+t^2)^2}{1+t^2} dt = \int t^3(1+t^2) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C = \\ = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C. \quad \blacksquare$$

$$3. J = \int \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin^{2l+1} x} dx, \quad k, l \in N, l > k.$$

Нәлли. $n = 2k+1$, $m = 2l-1$, $m+n = 2(l-k)$ чүт әдәд олдуғу үчүн $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси апарылыр.

$$dx = -\frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

олдуғуну интегралда нәзәрә алсаг,

$$J = \int \frac{(\cos^2 x)^k \cos x}{(\sin^2 x)^l \sin x} dx = \int t^{2k+1} (1+t^2)^{l-k-1} dt$$

алынар. Бу интегралын һесаблинамасы мәлүм түр.

Мисал 3. $J = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$ интегралыны һесаблинамлы

■ $m = 3$, $n = 5$, $m+n = 8$ олдуғу үчүн вә интеграл алындакы кәсрин сурәтиндә $\cos x$ олдуғу үчүн $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси мәгсәдәүлүндүр. Онда

$$J = -\int t^3(1+t^2)^2 dt = -\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C = \\ = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8} + C. \quad \blacksquare$$

$$4. J = \int \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2l+2} x} dx, \quad k, l \in \mathbb{N}, l \geq k.$$

Бу интеграл биринчи ҳалда олдуғу кими ҳесаблинаыр. Лакин интегралатты кәсрин сурәтиндә $\cos x$ олдуғу үчүн $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси апармағ лазым кәлир.

Гейд. Лухарыда кәстәрилен мисалларда m вә n -ин аңағ там олдуғу-ну гейд етмишдик. Бахдығымыз: һалларда m вә n кәср дә ола биләр, лакин $m+n-2k$ олмасы шәрти зәруридир.

Мисал 4. $J = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos^9 x}} dx$ интегралыны ҳесаблинамалы.

■ $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{9}{2}$, $m+n = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$ олдуғу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәсини тәтбиг етәк. Онда

$$J = \int t^{\frac{1}{2}} (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \\ = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^3 x \right) + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 5. $J = \int \sqrt{\frac{\cos^8 x}{\sin^8 x}} dx$ интегралыны ҳесаблаамалы.

$m = \frac{2}{3}$, $n = -\frac{8}{3}$, $m+n = -2$ олдуғу үчүн $t = \operatorname{ctg} x$ әвәзләмәси лазым ыр.

$$J = - \int t^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(1+t^2)^{\frac{8}{3}}}{(1+t^2)^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = - \int t^{\frac{2}{3}} dt = \\ = -\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{5} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 6. $J = \int \operatorname{tg}^2 x \sin^6 x dx$ интегралыны ҳесаблаамалы.

$$\blacksquare J = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

Бурада $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{13}{2}$; $m+n = -6$ олдуғу үчүн $t = \operatorname{tg} x$ әвәзләмәси апаралыр:

$$J = \int t^2 (1+t^2)^3 dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} + \dots \right)$$

$$5. m+n=0, m; n \in \mathbb{N}.$$

$$a) J = \int \frac{t^m}{1+t^2} dt$$

б. я. и. $m = n - k$ олдуу.
 $t = \operatorname{tg} x$ өзөтүмүз апармак

$$J = \int \operatorname{tg}^k x dx = \int t^k \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$6) J = \int \frac{\cos^k x}{\sin^m x} dx, k \in \mathbb{N}.$$

$t = \operatorname{ctg} x$ өзөтүмүз апармак

$$\int \frac{t^k dt}{1+t^2}$$

буларды $J = \int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралынын түрүнө
 айландырабыз. Ушундай кылып, буларды
 айландырабыз. Буларды интегралда
 елечек.

$$J = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \sin x \cos x dx, m, n \in \mathbb{N}$$

интегралда

$$u = \sin^{m-1} x, dv = \cos^{n-1} x \sin x \cos x dx$$

ишарэ етсэк,

$$du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx, v = \int \cos^{n-1} x \sin x \cos x dx = \frac{\cos^{n-1} x}{n+1}$$

олар. Онда

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx. \quad (3)$$

Дикер тарафдан

$$\int \sin^{m-1} x \cos^n x dx = \int \sin^{m-2} x \cos^n x (1 + \sin^2 x) dx \\ = \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx + \int \sin^m x \cos^n x dx = J_{n,m-2} + J_{n,m}. \quad (4)$$

(4) барабарлигын (3)-дө назар алсак,

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} J_{n,m-2} + J_{n,m}.$$

Чалышмалар:

1. $\int \sin^3 x dx,$
2. $\int \cos^3 x dx,$
3. $\int \frac{dx}{\cos^{12} x},$
4. $\int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x},$
5. $\int \frac{dx}{\sin^8 x \cos^4 x},$
6. $\int \frac{dx}{a + b \sin x},$
7. $\int \frac{\sin x dx}{(a + b \sin x)^2},$
8. $\int \sin x \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} dx,$
9. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x) \cos x},$
10. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x - \cos x},$

Жаваблар:

- $$-\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$
- $$\sin x - \sin^3 x - \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.$$
- $$\operatorname{tg} x + \frac{5}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^5 x + \frac{10}{7} \operatorname{tg}^7 x +$$
- $$+ \frac{5}{9} \operatorname{tg}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{tg}^{11} x + C.$$
- $$-\frac{1}{6} \operatorname{ctg}^6 x - \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^4 x - \frac{3}{2} \operatorname{ctg}^2 x +$$
- $$+ \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$
- $$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{ctg} x - \frac{10}{3} \operatorname{ctg}^3 x -$$
- $$- \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + C.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{a^2 - b^2} \arctg \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C; a^2 > b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| + C, \\ b^2 > a^2. \end{array} \right.$$

$$\frac{a \cos x}{(b^2 - a^2)(a + b \sin x)} + \frac{b}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

$$-\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x} -$$

$$-\frac{1 + m^2}{2m} \arcsin \frac{m \cos x}{\sqrt{1 + m^2}} + C.$$

$$\frac{1}{2(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x - \cos x| + C.$$

§ 4. ГИПЕРБОЛИК ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНЫМАСЫ

Гиперболик вәтәрс гиперболик функцијалар Тригонометрик функцијалара үзгүн оларат алты гиперболик функција мөвчүдүр. Бу функцијалара e^x вә e^{-x} функцијаларынын хәтти комбинасиясы вәсәгәсилә тәриф верилир.

$$1. \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{син с гиперболик}).$$

$$2. \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{косинус гиперболик}).$$

$$3. \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{тангенс гиперболик}).$$

$$4. \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{котангенс гиперболик}).$$

$$5. \operatorname{sch} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{секанс гиперболик}).$$

$$6. \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{косеканс гиперболик}).$$

Улгун тәрәс функциялар ашагы такылардыр.

$y = \operatorname{Arsh} x$ (ареасинус гиперболик), $y = \operatorname{Arch} x$ (ареакосинус гиперболик), $y = \operatorname{Arth} x$ (ареатангенс гиперболик), $y = \operatorname{Arcth} x$ (ареакотангенс гиперболик), $y = \operatorname{Arsch} x$ (ареасеканс гиперболик), $y = \operatorname{Arcsch} x$ (ареакосеканс гиперболик).

Тригонометрик функциялар үчүн олан дүстурлар, гиперболик функциялар үчүн дә өз күчүндә галыр:

$$1. \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

$$2. \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

$$3. \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1.$$

$$4. \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

$$5. \operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

$$6. \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$7. \operatorname{sch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

$$8. \operatorname{csch}^2 x = \operatorname{cth}^2 x - 1.$$

$$9. \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

$$10. \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

$$11. \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$12. \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}.$$

$$13. \operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{2\operatorname{th} x}.$$

$$14. \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

$$15. \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}.$$

$$16. \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}}, \quad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}}}$$

$$17. \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)].$$

$$18. \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)].$$

$$19. \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)].$$

Наперёд даём формулы для производных гиперболических функций:

$$1. (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$2. (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

$$3. (\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$4. (\operatorname{tch} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\operatorname{csch}^2 x.$$

$$5. (\operatorname{sen} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right)' = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{th} x \cdot \operatorname{sch} x, \quad (\operatorname{sch} x)' = -\operatorname{th} x \cdot \operatorname{sch} x.$$

$$6. (\operatorname{csch} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \right)' = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{csch} x.$$

$$7. y = \operatorname{Arsh} x, \quad x = \operatorname{sh} y, \quad 1 = \operatorname{ch} y \cdot y', \quad \text{откуда } y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ещё раз даём

$$8. (\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$9. (\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$10. (\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{1 - x^2}.$$

$$11. (\operatorname{Arsch} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$12. (\operatorname{Arcsch} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Гиперболик вә тәрс гиперболик функцијаларын интегралланмасы.

Гиперболик функцијаларын чөдвөл интеграллары:

$$1. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$2. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$3. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$4. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Arsh}\left(\frac{x}{a}\right) + C, & a > 0; \\ \operatorname{Arch}\left(\frac{x}{a}\right) + C, & a < 0. \end{cases}$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + C, & |x| < a; \\ -\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + C, & |x| > a. \end{cases}$$

$$7. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arctg} e^x + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + C.$$

Инди исә гиперболик функцијалардан асылы рационал функцијаларын интегралыны һесаблајаг.

$$1^\circ. I = \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx, \quad (1)$$

(1) интегралыны һесабламаг үчүн

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = t \quad (2)$$

өвәзләмәси апармаг кифәјәгдир. (2)-дән

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2} \quad (3)$$

вә

$$\operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\operatorname{sch} \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad (5)$$

олар. (1)-дэ (3), (4) вэ (5)-и нэзэрэ алсаг,

$$J = \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1-t^2} = \int R^*(t) dt. \quad (6)$$

олдугуну аларыг (6)-да $R^*(t)$ -рационал функција олдуғу үчүн онун интегралыны асанлыгла несаблаја биләрик.

2°. $J = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ типли интегралы эвэзлэмә васитәсилә ашағыдакы тип интеграллардан биринә кәтирмәк олур:

$$J_1 = \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad (6_1)$$

$$J_2 = \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx, \quad (6_2)$$

$$J_3 = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx. \quad (6_3)$$

J_1 , J_2 вэ J_3 интегралларынын һәр бириндә уғун гиперболик функција илэ эвэзлэмә апарсаг, бу интегралларын һәр бири рационал шәклә дүшәр.

Дәурдун да (6₁) интегралында $x = a \operatorname{th} t \left(t = \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch}^2 t} \right)$ эвэзләмәси апарсаг.

$$J_1 = \int R\left(\operatorname{ath} t, \frac{a}{\operatorname{ch} t}\right) \frac{a}{\operatorname{ch}^2 t} dt = \int R_1(e^t) dt.$$

Ејин гәјдә илэ J_2 интегралыны несабламаг үчүн $x = a \operatorname{sh} t$ ($dx = a \operatorname{ch} t dt$), J_3 интегралыны несабламаг үчүн $x = a \operatorname{ch} t$ ($dx = a \operatorname{sh} t dt$) эвэзләмәләрини апарсаг,

$$J_2 = \int R(a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t) a \operatorname{ch} t dt = \int R_2(e^t) dt,$$

$$J_3 = \int R(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t) a \operatorname{sh} t dt = \int R_3(e^t) dt$$

интегралларыны алмыш оларыг ки, бунларын да несабланмасы ашкардыр.

Чалышмалар:

Чаваблар:

$$1. \int \frac{\operatorname{th}^3 x}{\operatorname{sch}^4 x} dx,$$

$$2. \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x} dx,$$

$$3. \int x \operatorname{cth} x dx.$$

$$4. \int \operatorname{sh} \alpha x \cdot \operatorname{sh} \beta x dx,$$

$$\frac{1}{4 \operatorname{sch}^4 x} - \frac{1}{\operatorname{sch}^2 x} - \ln \operatorname{sch} x + C,$$

$$\frac{1}{3(1 + \operatorname{th} x)} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \sqrt{3}} \right) + C,$$

$$x \operatorname{cth} x + \ln \operatorname{sh} x + \frac{x^2}{2} + C,$$

$$\frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha x \cdot \operatorname{sh} \beta x - \beta \operatorname{sh} \alpha x \cdot \operatorname{ch} \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + C,$$

5. $\int \frac{x + \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} dx, \quad (x-1)(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) + \frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2x + \operatorname{ch} 2x) + C$
6. $\int \frac{dx}{e^{2x} \operatorname{ch}^4 x}, \quad -\frac{1}{3e^{2x} \operatorname{ch}^3 x} + C.$
7. $\int \frac{e^x dx}{1 - \operatorname{ch} x}, \quad \frac{1 + \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - x - \ln(1 - \operatorname{ch} x) + C.$
8. $\int \operatorname{arcsch}(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x dx, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{arcsin}(\operatorname{sh} x) - \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x} + C.$
9. $\int \operatorname{arsch} x \cdot \operatorname{sh} x dx, \quad \operatorname{ch} x \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - x + C.$
10. $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch} x)^2}, \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2} + C.$

§ 5. ГЕЙРИ-МҮЭЈЛЭН ЭМСАЛЛАР МЕТОДУ

Бу метод интегралалты функцианын ибтидаи функцијасынын шакли мэлум олан халларда гэтбиг едилә билэр.

$$1^\circ. \quad J = \int e^{kx} P_n(x) dx, \quad (1)$$

урада $P_n(x)$ функцијасы n дәрәчәли чоххәдлидир.

(1) интегралына һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$J = \int e^{kx} P_n(x) dx = \frac{1}{2} e^{kx} P_n(x) - \frac{1}{k} \int e^{kx} P'_n(x) dx \quad (2)$$

аларыг. (2) бәрәбәрлијинин сәг тәрәфиндәки интеграл (1) шәклиндәдир, лакин $P'_n(x)$ чоххәдлисинин дәрәчәси $P_n(x)$ -иⁿ дәрәчәсиндән бир ваһид кичиктир. Просеси n дәфә тәкрат етсәк

$$J = \frac{e^{kx}}{k} P_n(x) - \frac{e^{kx}}{k^2} P'_n(x) + \frac{e^{kx}}{k^3} P''_n(x) - \dots \pm \frac{1}{k^n} \int e^{kx} P_n^{(n)}(x) dx$$

аларыг. $P_n^{(n)}(x) = \text{const}$ олдуғу үчүн, ахырынчы интеграл асанлыгла һесапланар. Беләликлә,

$$\int e^{kx} P_n(x) dx = Q_n(x) e^{kx} + C. \quad (3)$$

Бурада $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$, n дәрәчәли гейри-мүәјлән әмсалды чоххәдлидир. Беләликлә, (1) интегралынын һесапланмасы A_i ($i = \overline{0, n}$) гейри-мүәјлән әмсалларынын һесапланмасына кәтирилир. (3) бәрәбәрлијиндән төрәмә алсаг

$$e^{kx} P_n(x) = k e^{kx} Q_n(x) + e^{kx} Q'_n(x)$$

вә ја

$$P_n(x) = k Q_n(x) + Q'_n(x). \quad (4)$$

4) ејилијиндә x -ин ујгун дәрәчәләринин әмсалларыны бәрә етмәклә A, A_1, \dots, A_n -ләрә һезәрән хәтти тәнликләр

системи алыныр вэ бурадан гејри-мүэјјән эмсаллар јеканэ олараг тэјин едилэр.

2°. Интегралалты функция $f(x) = P_n(x) \cos kx + Q_n(x) \sin kx$ шэклиндэ оларса (бурада $P_n(x)$ вэ $Q_n(x)$), n дэрэчэли чохэд-лилэрдир, онда бу функцияларын ибтидан функциясы $F(x) = S_n(x) \cos kx + T_n(x) \sin kx$ шэклиндэ олар. Бурада $S_n(x)$ вэ $T_n(x)$ гејри мүэјјән эмсаллы n дэрэчэли чохэддилэрдир. Демэли,

$$\int [P_n(x) \cos kx + Q_n(x) \sin kx] dx = S_n(x) \cos kx + T_n(x) \sin kx. \quad (5)$$

$P_n(x)$ вэ $Q_n(x)$ чохэддилэринин дэрэчэлэри бэрабэр олмаса, сыфыр эмсаллар дахил етмэккэ онларын дэрэчэлэринин бэрабэрлэшдирмэк олар. (5) бэрабэрлијиндэн төрэмэ алсаг

$$P_n(x) \cos kx + Q_n(x) \sin kx = S'_n(x) \cos kx + T'_n(x) \sin kx - kS_n(x) \sin kx + kT_n(x) \cos kx \quad (6)$$

олар. (6) ејилијиндэ ујгун эмсаллары бир-биринэ бэрабэр етмэккэ ахтарылан гејри-мүэјјән эмсаллар тапылар.

Белэликлэ, $\int [P_n(x) \cos kx + Q_n(x) \sin kx] dx$ интегралынын һесаблинамасы, $S_n(x)$ вэ $T_n(x)$ чохэддилэринин гејри-мүэјјән эмсалларынын тапылмасына кэтирилир.

Мисаллар кестэрэк.

Мисал 1. $J = \int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx$ интегралыны һесабли-малы.

■. Јухарыда дејилэнлэрэ эсасэн,

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx = (A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0)e^{3x} + C.$$

Һэр тэрэфдэн төрэмэ алсаг,

$$x^3 - 2x^2 + 5 = 3A_3 x^3 + 3x^2(A_2 - A_3) + x(3A_1 + 2A_2) + (3A_0 + A_1)$$

олар. Ујгун эмсаллары бэрабэрлэшдирсэк,

$$\begin{cases} x^3 & \left| \begin{aligned} 3A_3 &= 1, \\ 3A_2 + 3A_3 &= -2, \\ 3A_1 + 2A_2 &= 0, \\ 3A_0 + A_1 &= 5 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

системини аларыг ки, бурадан $A_3 = \frac{1}{3}$, $A_2 = -1$, $A_1 = \frac{2}{3}$,

$A_0 = \frac{13}{9}$ тапылар. Онда

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx = \frac{1}{3} \left(x^3 - \frac{x^2}{3} + 2x + \frac{13}{3} \right) e^{3x} + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int (x^2 + x + 1) \sin x dx$ интегралыны һесабли-

малы.

■ $J = (A_0 + A_1x + A_2x^2) \sin x + (B_0 + B_1x + B_2x^2) \cos x + C$.
 Һәр тәрәфдән төрәмә алсаң

$$(x^2+x+1)\sin x = [(A_1 - B_0) + (2A_2 - B_1)x - B_2x] \sin x + [(A_0 + B_1) + (A_1 + 2A_2)x + A_2x^2] \cos x.$$

Беләликлә,

$$\begin{cases} A_1 - A_0 = 1, \\ 2A_2 - B_1 = 1, \\ B_2 = 1, \\ A_0 + B_1 = 0, \\ A_1 + 2A_2 = 0, \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

системини аларың.

Бурадан да $A_2 = 0$, $B_2 = -1$, $A_0 = -1$, $A_1 = -2$, $B_1 = 1$ олдуңу
 ылыңың. Тапылаң сабитләри јухарыда нәзәрә алсаң

$$\int (x^2 + x + 1) \sin x dx = (-x^2 - x + 1) \cos x + (2x + 1) \sin x + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. $J(x^3 + 3x + 5) \cos 2x dx$.

$$\blacksquare \int (x^3 + 3x + 5) \cos 2x dx = (A_0x^3 + A_1x + A_2) \cos 2x + (B_0x^2 + B_1x + B_2) \sin 2x + C.$$

Төрәмә алың,

$$(x^3 + 3x + 5) \cos 2x = 2B_1x^2 \cos 2x + x(2B_1 + 2A_0) \cos 2x + (A_1 + 2B_2) \cos 2x - 2A_0x \sin 2x + 2(B_0 - A_1)x \sin 2x + (B_1 - 2A_2) \sin 2x,$$

уңгун әмсаллары бирләшдирсәң,

$$\begin{cases} 2B_0 = 1; \\ 2(B_1 + A_0) = 3; \\ A_1 + 2B_2 = 6; \\ 2A_0 = 0; \\ 2(B_0 - A_1) = 0; \\ B_1 - 2A_2 = 0. \end{cases}$$

системи, бурадан исә $B_0 = \frac{1}{2}$, $A_0 = 0$, $A_1 = \frac{1}{2}$, $B_1 = \frac{3}{2}$,
 $B_2 = \frac{9}{4}$, $A_2 = \frac{3}{4}$ тапылың. Нәтичәдә

$$J = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \right) \sin 2x + C$$

олачаңдың. ■

Мисал 4. $J = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$, $a_1b - ab_1 \neq 0$.

■ $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$
 вә јә

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = (Aa - Bb) \sin x + (Ab + Ba) \cos x$$

алынар. Ујгун эмсаллары бәрабәр етмәклә,

$$\begin{cases} Aa - Bb = a_1, \\ Ab + Ba = b_1 \end{cases}$$

системини аларыг. Бурадан A вә B эмсаллары тапылыр:

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}.$$

Беләликлә,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx + \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx \\ &= \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} \cdot x + \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} \\ &\quad - \frac{aa_1 - bb_1}{a^2 + b^2} \cdot x + \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} \ln |a \sin x + b \cos x| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Мисал 5. $J = \int \frac{(a \sin x + b \cos x) dx}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)(a_2 \sin x + b_2 \cos x)}, a, b, -b_2 a_1 \neq 0$ интегралыны һесабламылы.

$$\blacksquare \quad \frac{a \sin x + b \cos x}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)(a_2 \sin x + b_2 \cos x)} = \frac{A}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)(a_2 \sin x + b_2 \cos x)} + \frac{B}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)}.$$

Онда

$a \sin x + b \cos x = (Aa_2 + Ba_1) \sin x + (Ab_2 + Bb_1) \cos x$
олар вә

$$\begin{cases} Aa_2 + Ba_1 = a, \\ Ab_2 + Bb_1 = b \end{cases}$$

системини аларыг. Бу система һәлл етсәк,

$$A = \frac{a_1 b - a b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad B = \frac{a b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Беләликлә,

$$J = \frac{a_1 b - a b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \int \frac{dx}{a_1 \sin x + b_1 \cos x} + \frac{a b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x}.$$

Сонунчу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки интеграллар $\int \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ вәзләмәси илә асанлыгла һесабланьыр. \blacksquare

Мисал 6. $J = \int \frac{dx}{\sin(x+a) \sin(x-b)}, a \neq b.$

$$\blacksquare \quad \frac{1}{\sin(x+a) \sin(x-b)} = \frac{A \cos(x+a)}{\sin(x-a)} + \frac{B \cos(x+b)}{\sin(x+b)},$$

бурада A вә B гејри-мүәјјән сабитләрдир. (7) ејнилијиндән

$$1 - A \sin(x+b) \cos(x-b) = B \sin(x+a) \cos(x+b)$$

вә ја

$$1 = \frac{A}{2} [\sin(b-a) + \sin(2x+a+b)] + \\ + \frac{B}{2} [\sin(a-b) + \sin(2x+a+b)].$$

Угун эмсаллары барабар етсәк,

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \sin(a-b) = 1, \\ \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \sin(2x+a+b) = 0. \end{cases}$$

Бурадан $A+B=0$, $(B-A)\sin(a-b)=2$;

$$B = -A, A = -\frac{1}{\sin(a-b)}, B = \frac{1}{\sin(a-b)}.$$

алынар, A вә B үчүн тапылмыш бу гимәтләри (7)-дә нәзәрә алсаг,

$$J = \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx \right] = \frac{1}{\sin(a-b)} [\ln|(x+b)| - \\ - \ln|\sin(x+a)|] + C = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C. \blacksquare$$

Мисал 7. $J = \int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$, $\left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ һесабламалы.

$$\blacksquare J = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}.$$

$$\frac{1}{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}} = \frac{A \cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} + \frac{B \sin \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}}, \quad (8)$$

бурада A вә B гејри-мүәјјән сабитләрдир. (8) ејнилијиндән:

$$1 = A \cos \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} + B \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2} = \\ = \frac{A}{2} \left[\cos \left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2} \right) + \cos \left(\frac{x-a}{2} + \frac{x+a}{2} \right) \right] + \\ + \frac{B}{2} \left[\cos \left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2} \right) - \cos \left(\frac{x-a}{2} + \frac{x+a}{2} \right) \right]$$

олар. Угун эмсаллары барабарләшдирсәк,

$$\begin{cases} A+B = \cos a, \\ A-B = 0 \end{cases}$$

олдугуну аларыг.

$A - B = \frac{1}{2 \cos a}$ олдугу системдөн асанлыгла тапылып. Бу
гүлмәтләрү (8) -дә јазсаг вә сонра dx -ә вуруб интегралласаг:

$$J = \frac{1}{\cos a} \left[\ln \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x-a}{2} \right| \right] + C =$$

$$= \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x-a}{2}} \right| + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 8. $J = \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx$, ($a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) интегралыны
һесабламалы.

■ Интегралалты функцијада садә чевирмә апарсаг,

$$J = \int \left[\frac{\sin x \sin(x+a) + \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} - 1 \right] dx =$$

$$= x + \int \frac{\cos x \cos(x-a) + \sin x \sin(x-a)}{\cos x \cos(x+a)} dx$$

олар. Саг тәрәфдәки интегралы J_1 илә ишарә едиб ону һе
саблајаг:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \frac{[\cos(x+a-x) + \cos(x+a+x)] + [\cos(x+a-x) - \cos(x+a+x)]}{\cos x \cos(x+a)} dx =$$

$$= \int \frac{\cos ax}{\cos x \cos(x+a)} dx.$$

Инди исә саг тәрәфдәки

$J_2 = \int \frac{dx}{\cos x \cos(x+a)}$ интегралыны һесаблааг.

$$\frac{1}{\cos x \cos(x-a)} = \frac{A \sin x}{\cos x} + \frac{B \sin(x+a)}{\cos(x+a)} \quad (*)$$

(9) ејнилијиндән A вә B гејри мүәјјән сабитләрүни тапар.

$$1 = A \sin x \cos(x+a) + B \sin(x+a) \cos x = \frac{1}{2} A [\sin(x-x-a) +$$

$$+ \sin(x+x+a)] + \frac{B}{2} [\sin(x+a-x) + \sin(x-a+x)]$$

вә ја

$$(B-A) \sin a + (A+B) \sin(2x+a) = 2.$$

Бурадан

$$B = -A, \quad A = \frac{1}{\sin a}, \quad B = -\frac{1}{\sin a}.$$

Бу гүлмәтләрү (9) -дә јазсаг вә сонра dx -ә вуруб инте
ралласаг:

$$J_2 = \frac{1}{\sin a} \left[\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x-a)} dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \right] = \frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| + C.$$

Беләликлә, аларыг ки,

$$J = -x + \operatorname{ctg} a \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| + C. \quad \blacksquare$$

Мисал 9. $J = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad (10)$

■ $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x). \quad (11)$

(11)-дән асанлыгга тапырыг ки,

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}.$$

(11)-и (10)-да нәзәрә алсаг,

$$J = A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} + B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx. \quad (12)$$

(12) бәрабәрлигыннн сәт тәрәфиндәки икинчи интегралы һесапламаг үчүн $a \sin x + b \cos x = t$ әвәзләмәснн апарат. Онда

$$J = \int \frac{a \cos x - b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{a \sin x + b \cos x} + C.$$

Беләликлә,

$$J = A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} + \frac{B}{a \sin x + b \cos x} = \frac{A}{a^2 + b^2} \int \frac{dx}{\sin(x - \varphi)} + \frac{B}{a \sin x + b \cos x} = \frac{A}{a^2 + b^2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| + \frac{B}{a \sin x + b \cos x} + C.$$

Бурада

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right),$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \blacksquare$$

Мисал 10. $J = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x + d} dx$

интегралынн һесапламалы.

■ $a_1 \sin x + b_1 \cos x + d = A(a \sin x + b \cos x + d) + B(a \cos x - b \sin x) + D. \quad (14)$

(14) еңилигынн верилмәш интегралда нәзәрә алсаг

$$J = \int \frac{A(a \sin x + b \cos x + d) + B(a \cos x - b \sin x) + D}{a \sin x + b \cos x + d} dx = A \int \frac{a \sin x + b \cos x + d}{a \sin x + b \cos x + d} dx + B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x + d} dx + D \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + d} = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + d| + D \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + d}.$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 - b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 - b^2}, \quad D = d_1 \quad Ad.$$

эмсаллары (14) еңилијиндөн тапылып. ■

$$\text{Мисал 11. } J = \int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + d_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx \quad (15)$$

интегралыны ҳесабламамы.

$$\blacksquare a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + d_1 \cos^2 x = (a \sin x + b \cos x)(A \cos x - B \sin x) + D(\sin^2 x - \cos^2 x). \quad (16)$$

Ушун эмсалары барабар етмәклә,

$$\begin{cases} a_1 = D - aB; \\ 2b_1 = aA - bB; \\ d_1 = Ab + D \end{cases}$$

системини аларыг. Бу системдән

$$A = \frac{b(d_1 - a_1) + 2ab_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{a(d_1 - a_1) - 2bb_1}{a^2 + b^2}, \quad D = \frac{a_1 b + a \cdot d_1 - 2ab b_1}{a^2 + b^2}$$

олдугуну аларыг.

(16) еңилијини (15) интегралында нәзәрә алсаг

$$J = A \sin x + B \cos x + D \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = A \sin x + B \cos x + \frac{D}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| + C,$$

бурада

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

§ 6. БӘЗІ ХҮСУСИ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

$$J = \int \frac{\varphi(x)}{(x-a)^k} dx, \quad k \in \mathbb{N}', \quad k > 1, \quad x \neq a. \quad (1)$$

$\varphi(x)$ исә e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$ ($a \in \mathbb{R}$) функцијаларындан бириди

и $\varphi(x)$, $dv = \frac{dx}{(x-a)^k}$ гәбул едиб, һиссә-һиссә инте

граллама дүстуруну тәтбиғ етсәк,

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x-a)^k} dx = -\frac{\varphi(x)}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + \frac{1}{k-1} \int \frac{\varphi'(x)}{(x-a)^{k-1}} dx$$

олар. Јенидән

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad (\sin ax)' = a \cos ax, \quad (\cos ax)' = -a \sin ax$$

олдугуну

$$\int \frac{\varphi'(x)}{(x-a)^{k-1}} dx \quad (2)$$

интегралында нәзәрә алсаг, јенә дә (1) типли интеграл алмыс оларыг. (2) интегралында, интегралалты функцијанын мәхрә

чинин дэрэчэси бир эхик олар. Ниссэ-ниссэ интеграллама просесини ардычыл оларак k дэфэ тэкрар етсэк

$$J_1 = \int \frac{e^{ax}}{(x-a)} dx, \quad J_2 = \int \frac{\sin ax}{x-a} dx \quad \text{вэ} \quad J_3 = \int \frac{\cos ax}{x-a} dx \quad (3)$$

интегралларыны алмыш оларыг.

J_1 интегралында $a=0$, $e^{ax} = z$ габул етсэк, $ax = \ln z$ $(dx = \frac{dz}{az})$, $x = \frac{1}{a} \ln z$ олар. Онда

$$J_1 = \int \frac{dz}{\ln z}. \quad (4)$$

Ени гайда илэ

$$J_2 = \int \frac{\sin x}{x}, \quad J_3 = \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (5)$$

олдугуну аларыг.

J_1 , J_2 вэ J_3 интегралларыны элементар функцијалар васитеси илэ ифадэ етмэк мүмкүн дејил.

(4) вэ (5) интегралларыны

$$\text{Li}x = \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \text{Si}x = \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{Ci}x = \int \frac{\cos x}{x} dx$$

илэ ишарэ едиб, логарифма интеграл, синус интеграл вэ косинус интеграл кими адландырылар.

§ 7. ЕЛЛИПТИК ИНТЕГРАЛА КЭТИРИЛЭН ВЭЗИ МЭСЭЛЭЛЭР

1. Рэггасын рэгсинэ анд мэсэлэ.

m күтлэли P мадди нөгтэси, узунлугу l олан дартылмајан вэ күтлэси нэзэрэ алынмајан сапдан асылмышдыр. Ағырлыг гүввэсинин тэсирі алгында P нөгтэси радиусу l олан, шагули мүстэвидэ јерлэшэн чеврэ бојунча һэрэкэт едир.

Рэггас башлангыч $t=0$ анында шагули вэзијјэтдэн $\alpha < \frac{\pi}{2}$ бучаҗағы алтында дэјишдикдэ, рэггасын һэрэкэт ганунуну тэјин етмэк тэлэб олунур (рэггасын башлангыч сүр'эти сыфырдыр) (шәкил 4).

Рэггасын вэзијјэти φ — $\angle AOP$ бучағы илэ тэјин едилир. Рэггаса шагули нстигамэтдэ ашағы јөнөлмиш ағырлыг гүввэси вэ сапын дартылма гүввэси тэсир едир. Тутаг ки, мадди нөгтэ чеврэнин PA гөвсү бојунча t мүддэтиндэ s јолу кетмишдыр. Ашкардыр ки, $s = l\varphi$ олар. Ағырлыг гүввэсинин компоненти олан тохунма гүввэси $PB = mg \sin \theta$ олур. Дикэр тәрәфдән Нјутонун икинчи гануна асасән



Шәкил 4.

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -mg \sin \theta.$$

Бурада s $l\theta$ олдуğunu нәзәрә алыб m -и хтисар етсәк ријази рәғғасын тәнлији адланан

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (1)$$

тәнлији алыныр.

s гөвс узунлуғу A -дан P -ја дөғру артан олдуғундан вә ағырлыг гүввәсинин компоненти олан тохунма гүввәси бу истигамәтин әксинә олдуғу үчүн ышарә маңфи көтүрүлүр.

(1) тәнлијинин һәлли илә мәшғул олаг. Бу мәғсәдлә онун сол тәрәфини $\frac{d\theta}{dt}$ -ја, сағ тәрәфини исә $d\theta$ -ја вурсаг

$$l \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} dt = -g \sin \theta d\theta \quad (1')$$

олур. $\frac{d^2 \theta}{dt^2} dt = d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ олдуғуну (1')-дә нәзәрә алсаг

$$l \frac{d\theta}{dt} d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -g \sin \theta d\theta \quad (2)$$

(2) бәрәбәрлијиндән интегралласаг,

$$l \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g \cos \theta + C \quad (3)$$

алынар.

C сабитини тә’јин етмәк үчүн, мәсәләнн шәртиндән истифадә едәк. Јә’ни $t=0$ гијмәтиндә бучаг сүр’әти $\frac{d\theta}{dt}=0$ олдуғу үчүн $\theta = \alpha$ һесаб едилир. (3) ифадәсиндән

$$2g \cos \alpha + C = 0$$

вә ја

$$C = -2g \cos \alpha.$$

C үчүн алынан бу гијмәти (3)-дә нәзәрә алсаг,

$$l \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g (\cos \theta - \cos \alpha) \quad (4)$$

олур. $\frac{g}{l} = h^2$ ышарә етсәк вә $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$, $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ олмасындан, $\cos \theta - \cos \alpha = 2\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$ алынар.

Бу фәрғи (1)-дә нәзәрә алсаг

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4h^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

вә ја

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2h \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5)$$

(5)-дән

$$dt = \frac{d\theta}{2h \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

асанлыгла алынар. Ахырынмы барабарлији интегралласар

$$t = \frac{1}{h} \int \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (6)$$

олар. Ахырынмы интегралы садэл шидирмэк үчүн

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \varphi \quad (7)$$

эвэлэмеси апарар. Бурада φ жени дэјишэндир. (7) ифадэсинден дифференциал алсар,

$$\cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{d\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} \quad (8)$$

(8) барабарлијини (6)-да нэзэрэ алсар,

$$ht = \int \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} \quad (9)$$

алынар.

(7) барабарлијинден $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ гижмэтини (9)-да јазсар

$$ht = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}}$$

олар.

$\sin \frac{\alpha}{2} = k$, ($0 < k < 1$) ишарэ етсэк,

$$t = \frac{1}{h} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Саг тэрэфдэки интеграл хүсуси эһәмийјет кэсб едир.

§ 8. ЕЛЛИПТИК ИНТЕГРАЛЛАР

IV фәсилдә

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

интегралынын hesabланмасы илэ машгул олмушуг
Тэби оларат

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 - bx^2 + cx + d}) dx, \quad (1)$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx \quad (2)$$

интегралларын hesabланмасы маселеси гаршыжа чыхыр. Бу ва ја дикэр маселэлэрин хэллинде бу интеграллара тез-тез раст кэлинир.

(1) вэ (2) интеграллары елементар функцијалар васитэсилэ ифадэ едилмирсэ, бу интеграллара еллиптик, елементар функцијалар васитэс илэ ифадэ едилирсэ, псевдоеллиптик интеграллар дејилир.

(1) вэ (2) интегралларында иштирак едэн чоххэдлилерин эмсаллары хэгигидир вэ тэкрар көклэри јохдур. Экс халда, хэтти һиссэ көкдэн чыха билэр. нэтичэдэ интеграл бизэ мәлум олан тип интеграллара кэлэр.

(1) вэ (2) интегралларынын әһәмијјетини нэзэрэ аларат, бә'зэн интегралалты функција үчүн чадвал тәртиб етмэк ла зым кэлир. Анчаг функцијада чохлу параметрин олмасы бу иши кифајет гэдэр чэтинләшдирир. Бу чэтинлији арадан галдырмаг үчүн (1) вэ (2) интегралларыны каноник шәклэ салмаг лазым кэлир. Ону да гејд едэк ки, (1) интегралы, (2) интегралына асанлыгла кәтирилир. Доғрудан да, үч дәрәчәли чоххэдлинин һеч олмаса бир һэгиги көкү олдугу үчүн (һәмин көкү x_0 илэ ишарэ едэк)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - a(x - x_0)(x^2 + px + q)$$

олар. $x - x_0 = \frac{t^2}{2}$ әвэзләмәси апарсаг (1) интегралы (2) интегралы шәклинә дүшэр. Она көрә (2) интегралыны өјрәнмэк кифајетдир.

Чәбрдән мәлумдур ки, һәр бир (һэгиги эмсаллы) дөрд дәрәчәли чоххэдлини ики квадрат үчхэдлинин һасили шәклинә јазмаг олар:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - a(x^2 + px + q)(x^2 + p_1x + q_1).$$

Һәмишә хэтти вэ ја кәср хэтти әвэзләмә тапмаг олар ки квадрат үчхэдлинин һәр бирини хәттиләшдирэр. Белә бир әвэзләмәдән сонра (2) интегралы

$$\int \frac{R(t^2)dt}{A(1 + mt^2)(1 + m_1t^2)} \quad (3)$$

шәклинә дүшэр. Даһа сонра әлавә әвэзләмәләр дахил етсәк (3) интегралы

$$\int \frac{R_1(z^2)dz}{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}, \quad (0 < k < 1). \quad (4)$$

бурада R -мүәјјән ратионал функцијадур. Сиз элемен-

тар эвөзлөмөлөр васытеси илэ (4) интегралы ашагыдакы үч шөклө кэтирилир.

$$1. \int \frac{dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \quad 2. \int \frac{z^2 dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

$$3. \int \frac{dz}{(1+hz^2)V(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

Үчүнчү интегралда h —комплекс эдэд ола билср.

Ж. Лиувилл*) ксбат етмишдир ы, бу интеграллар елементар функцијалар васытеси илэ ифаде едилмир.

А. Лежандр** бу интеграллары үлгүн оларар 1-чи, 2-чи вэ 3-чү нөв еллиптик интеграл алландырмышдыр. Лежандр $z = \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) эвөзлөмөсү васытеси илэ бу интегралларын шөклүнн дэјишдирмишдыр. Бунлардан биринчиси

$$\int \frac{d\varphi}{V1-k^2 \sin^2 \varphi}$$

интегралына, икинчиси

$$\int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V1-k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{k^2} \int \frac{d\varphi}{V1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{k^2} \int V1-k^2 \sin^2 \varphi d\varphi$$

(биринчи интеграла $\int V1-k^2 \sin^2 \varphi d\varphi$ алава олунур) интегралына, нэһајэт үчүнчү интеграл көстөрилэн эвөзлөмө васытеси илэ

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi)V1-k^2 \sin^2 \varphi}$$

интегралына чеврилир.

Мәсәлэ. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ еллипс гөвсүнүн уз, илугуну тапмалы.

Һәл дји. Бу мәгсәдлө еллипсин

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ y = b \cos \varphi \end{cases}$$

* Жозеф Лиувил (1809—1882) мәшһур франсыз ријазиијатчысыдыр. 1836-чы илдэ „Ријазиијат вэ тәтбиги ријазиијат“ журналинын әсасынн гојмуш, вэ бу журналда илк дөфә оларар Е. Галуанын елми нәтичәларинн чап етдирмишдир. Онуи мүхтәлиф елм сәһәләриндә сапбаллы нәтичәләри вәрдыр О илк дөфә көстөрмишдир ки, e эдәди $ae^2 + be + c = 0$ галуаинин көкү ола билмәз.

** Адријен Мари Лежандр (1732—1833) франсыз ријазиијатчысыдыр Әсас елми нәтичәләри ријазии анализә, эдәлләр нәзәријәсинә вэ сүддир Ријазии анализдә мүһүм әһәмијәт кәсб едән Лежандр чох һәддисини онун ады илэ бағлыдыр. Илк дөфә оларар сәтә эдәлләрин пәлванма ганунуну вәрмишдир.

параметрик тэнлижиндэн истифадэ етэчэјик. Мә'лумдур ки, дүзбучаглы координат системиндэ истәнилән әјри төвсүнүн дифференциалы

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (5)$$

дүстуру илә тә'јин едилир. $dx = a \cos \varphi d\varphi$, $dy = -b \sin \varphi d\varphi$ бәра-
бәрликләрини (5)-дә нәзәрә алсаг

$$ds = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \varphi) + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Бурада $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ишарә етсәк (еллипсин эксцентриситети),

$$ds = a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (6)$$

олдуғуну аларыг.

(6) бәрабәрлијини интегралласаг

$$s = a \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

олар ки, буна да икинчи нөв еллиптик интеграл демашык.

$$J = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7)$$

биринчи нөв еллиптик интегралында $\sin \varphi = x$ илә әвәз етсәк

$$\cos \varphi d\varphi = \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Алынан б, ифадәләр (7)-дә нәзәрә алсаг.

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Беләликлә, биринчи нөв еллиптик интегралы алдыг.

МҮЭЛЛЭН ИНТЕГРАЛ

I ФӘСИЛ

РИМАН* ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. БӨЗІ ТӨРИФЛӘР

$[a, b]$ парчасында $f(x)$ функцијасынын тә'јин олундугуну фәрз едәк вә бу парчаны ихтлјары кәтүрүлмүш:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$$

нөгтәләри илә n сәјда парчалара бөләк.

Тә'риф 1. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < \dots < x_n = b$ шәр-
тини өдәјән нөгтәләр вериләрсә, $[a, b]$ парчасында бөлкү
верилмишдир вә символик оларак $\{x_k\}$ илә ишарә етилир.

Тәриф 2. $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ парчаларынын
узунлуғуну уғун оларак $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) нөгтәлә-
риндә функцијанын гүймәтинә вуруб топласаг, алынган

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \quad (1)$$

чәминә $f(x)$ функцијасынын $\{x_k\}$ бөлкүсүнә уғун интеграл
чәми оејилир.

Гәјд едәк ки, $[a, b]$ илә мұхтәлиф гәјда илә парчалара
бөлсәк вә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) ихтлјары сечилсә, верилмиш
 $f(x)$ функцијасы үчүн $[a, b]$ парчасында истәңилән сәјда ин-
теграл чәмләри дүсәлтмәк олар.

Беләликлә, (1) интеграл чәми парчаларын бөлүнмә гәјда-
сындан вә бу парчаларда $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) нөгтәләри-
нин сечилмәсиндән асылдыр.

$0 < x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ ишарә етсәк, (1) интеграл чәмини

* Георг Фридрих Бернхард Риман (1826—1866) алман рија-
нзијатчысыдыр.

1851-чи илдә Геттинген университетиндә докторлуғ дәрәсәи алмыш
вә 1854-чү илдән өмрүнүн ахырына кими һәмин университетдә әввәлчә
доцент вә сонра профессор вәзифәсиндә ишләмишдир Риман аз мүддәтә
бир сыра фундаментал әсәрләр јазмагла дүнјанын даһи ријазијатчылары
сәвјәсинә јүксәлмишдир.

Риман өмрүнүн ахырынчы ајларыны Италијадә јашамыш вә ағыр хәс-
тәликлән сонра 40 јашында орада вәфат етмишдир.

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2)$$

эклиндэ жазмаг олар.

Белэ ки, $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ парчасына бэ'зэн хүсүсү парча, $[x_{k-1}, x_k]$ нөгтөсінэ ісэ аралыг нөгтө де] лир. $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, n)$ хүсүсү парчаларынын эн бөйүүнүн узунлугуну Δx_k нлэ ишарэ едчб, она $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн диаметри $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ нлэ ишарэ едчб, она $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ејэчәјик.

Тэ'риф 3. Ихтијари $\varepsilon > 0$ эдэдинэ көрө елэ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ парса ки, $\lambda < \delta$ олоугда, истәнилэн $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k=1, n$) чөгтөләри үчүн $|J - \sigma| < \varepsilon$ олур, онда J эдэдинэ $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн диаметри сыфра јакынлашдыгда (2) интеграл чәм-ләринин лимити дејилир вә

$$J = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$$

шәклиндә јазылыр.

Тэ'риф 4. Верилмиш $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парча-сынын истәнилэн $\{x_k\}$ бөлкүсүнэ уггун интеграл чәминин $\lambda \rightarrow 0$ јакынлашдыгда лимити варса, бу функция $[a, b]$ пар-часында Римана көрә интегралланан адланыр.

J эдэдинэ $f(x)$ функцијасынын Римана көрә мүјәјән ин-тегралы дејилир вә белэ ишарэ ед' лир:

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

(„интеграл a -дан b -јә ефикс де икс“ кими охунур).

a вә b уггун олараг ашагы гә јухары интеграллама сәр-һәдләри адланыр. Бурада $[a, b]$ -интеграллама парчасы, $f(x)$ -интегралалты функция, $f(x) dx$ -интегралалты ифадә вә x -интеграллама дәј шәни адланыр. Интеграл чәминин гу-рулмасына вә онун лимитинин һесабланмасына анд бир нечә мисал көстәрәк.

Мисал 1. $f(x) = \cos x$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында интеграл чәминин лимитини һесабламалы.

■ $[a, b]$ парчасыны ашагыдакы гәјда нлэ n бәрәбәр һис-сәјә бөләк: $x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}, x_n = \frac{nb}{n} = b$. Беләләклә, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ парчаларынын һәр биринин узун-лугу $x_k - x_{k-1} = \frac{b}{n}$ олар. $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k=$

$= \overline{1, n}$) эвэзинэ исэ һэр бир парчанын саг учуну, j -ни $\xi_k = x_k$ нөгтэсини көтүрүб интеграл чэми дүзэлдэк. Онда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} \cos x_k = \\ = \frac{b}{n} \left(\cos \frac{b}{n} + \cos \frac{2b}{n} + \dots + \cos \frac{nb}{n} \right)$$

ифадэси $f(x)$ функциясанын интеграл чэмидир. Бу чэмин лимитини һесаблајаг. Лимити һесабламаг үчүн саг тэрәфдэки ифадэни $2 \sin \frac{b}{2n}$ -э вураг вэ һэм дэ бөлөк. Онда

$$\sigma = \frac{b}{n} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2n}} \left(2 \cos \frac{b}{n} \cdot \sin \frac{b}{2n} + 2 \cos \frac{2b}{n} \cdot \sin \frac{b}{2n} + \right. \\ \left. 2 \cos \frac{3b}{n} \cdot \sin \frac{b}{2n} + \dots + 2 \cos \frac{nb}{n} \cdot \sin \frac{b}{2n} \right)$$

Саг тэрәфдэ иштарак едэн һэр бир һәддэ синусларын фэргиними ифадэ етсэк,

$$\sigma = \frac{b}{n} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2n}} \left[\left(\sin \frac{3b}{n} - \sin \frac{b}{2n} \right) + \left(\sin \frac{5b}{n} - \sin \frac{3b}{n} \right) + \right. \\ \left. + \left(\sin \frac{7b}{n} - \sin \frac{5b}{n} \right) + \dots + \left(\sin \frac{(2n-1)b}{n} - \sin \frac{(2n-3)b}{n} \right) \right] \\ = \frac{b}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{b}{2n}} \left[\sin \frac{(2n-1)b}{2n} - \sin \frac{b}{2n} \right] \\ = \frac{b}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{b}{2n}} \cdot \left[\sin \left(1 + \frac{1}{2n} \right) b - \sin \frac{b}{2n} \right]$$

олар. Лимитэ кечэрэк

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{b}{2n}}{\sin \frac{b}{2n}} \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(1 + \frac{1}{2n} \right) b = \sin b$$

вэ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{b}{2n} = 0$ олдуғуну нэээрэ алсаг,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \sin b. \quad \blacksquare$$

Парчаларын һэр биринин узунлуғу $\frac{b}{n}$ олдуғундан $\lambda = \frac{b}{n}$ көтүрсэк, $n \rightarrow \infty$ олдуғда $\lambda \rightarrow 0$.

Мисал 2. $f(x) = a^x$ ($a > 0$) функцијасынын $[0, 1]$ парчасында интеграл чөмүтүнүн лимитини ҳесаблајын.

■ $[0, 1]$ парчасыны $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 0, n-1$) кими n берабәр һиссәјә бөләк вә ξ_k әвәзлә һәр бир парчанын сол учундакы $\xi_k = x_k$ ($k = 0, n-1$) иәтәсин; кәтүрүб интеграл чөмүтүн дүзәлдәк. Онда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) (x_{k+1} - x_k);$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}; \quad \xi_k = x_k = \frac{k}{n}; \quad f(\xi_k) = f(x_k) = a^{\frac{k}{n}}$$

олдугундан

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \left(1 + a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \dots + a^{\frac{n-1}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{a^{\frac{n}{n}} - a^{\frac{0}{n}}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{a - 1}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}. \end{aligned}$$

Сонунчу кифадә $f(x) = a^x$ функцијасынын $[0, 1]$ парчасында интеграл чөмүдир. Онын лимитини һесабламаг үчүн әввәлчә мәһрәч, н лимитини һесаблајар.

Бу мәгсәдлә $\frac{1}{n} = t$ лә әвәз етсәк ($n \rightarrow \infty$ олдугда $t \rightarrow 0$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t}$$

олар Ахырынчы лимити һесабламаг үчүн сә $a^t - 1 = y$ илә әвәз етсәк, $a^t = 1 + y$ вә

$$t \ln a = \ln(1 + y); \quad t = \frac{\ln(1 + y)}{\ln a}$$

алынар. $t \rightarrow 0$ олдугда, $y \rightarrow 0$. Беләликлә,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} \ln a = \ln a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \\ &= \ln a \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1 + y)^{\frac{1}{y}}} \right] = \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = \ln a \end{aligned}$$

олдугундан $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$ олур.

Онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \frac{a \cdot I}{\ln a}. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. $f(x) = x^2$ функцијасынын $[1, 2]$ парчасында интеграл чәминин лим тәһи һесабламаһы.

■ $[1, 2]$ парчасыны $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ кими n бәрабәр һиссәјә бөләк, $\xi_k (k = 1, n)$ әвәзинә һсә һәр бир парчанын сағ учундакы нөгтәһи кәтүрсәк вә

$$x_k - x_{k-1} = \frac{2 - (-1)}{n} = \frac{3}{n}; \quad \xi_k = x_k = -1 + \frac{3}{n}k, \quad (k = 1, n)$$

$$f(\xi_k) = x_k^2 = \left(-1 + \frac{3}{n}k\right)^2$$

олдугуну нәзәрә алсағ,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(x_k) (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(-1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \end{aligned}$$

вә ја

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \\ &= \frac{3}{n} \left[n - \frac{6}{n}(1 + 2 + \dots + n) + \frac{9}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)\right]. \end{aligned}$$

Даһа сонра,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

олдугуну нәзәрә алсағ,

$$\sigma = \frac{3}{n} \left[n - \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right].$$

Сағ тәрәфи садәләшдәриб лим.тә кечсәк,

$$\begin{aligned} \sigma &= 3 - 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma &= 3 \end{aligned}$$

олдугуну аларығ. ■

(2) интеграл чәми һағғында ашағыдакы теорем һсбат едәк.

Теорем. (2) интеграл чаминин лимити варса, бу лимит јеканәдир.

◀ Эксини фәрз едәк. Фәрз едәк ки, J_1 вә J_2 . (2) интеграл чаминин мүхтәлиф лимитләридир. Мүәјјән олмаг үчүн $J_1 < J_2$ гәбул едчб, ε -ну ашагыдакы кими сечәк:

$$\varepsilon = \frac{J_2 - J_1}{2} > 0.$$

Фәрзијәмизә көрә J_1 вә J_2 мүхтәлиф әдәдләр олуб, (2) интеграл чаминин лимитләридир. Онда лимитин тәрифинә әсасән ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\delta > 0$ әдәди вардыр ки, $\Delta x_k < \delta$ олдугда,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - J_1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - J_2 \right| < \varepsilon$$

вә ја

$$J_1 - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < J_1 + \varepsilon \quad (3)$$

$$J_2 - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = J_2 - \varepsilon. \quad (4)$$

$J_2 - J_1 = 2\varepsilon$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J_1 + \varepsilon = J_2 - \varepsilon \quad (5)$$

бәрабәрлијини аларыг.

(3), (4) вә (5)-дән

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < J_1 + \varepsilon = J_2 - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

алынар. Ахырынчы бәрабәрсизләкдән зиддијәт алындығын-
дан $J_1 = J_2$ олмалыдыр. ►

§ 2. ИНТЕГРАЛ ЧАМИНИН БӘНДӘСН МӘНАСЫ

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

интеграл чәм. отурачаглары $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) пар чалары
вә һүндүрлүјү $f(\xi_k)$ ($\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$) олан дүзбучаглылардан
ибарәт пилләвари фигурун сәһәсини ифадә едир (шәкил 5)

Римана көрә интеграллана билән
 функцияга мисал оларак $f(x) = C =$
 $= \text{const}$ функциясыны көстөрмәк
 лар. Бурада

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

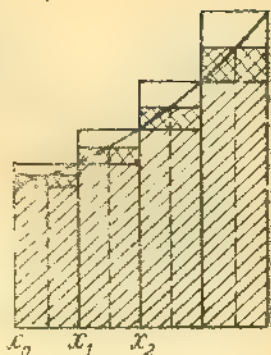
Догрудан да $[a, b]$ парчасынын
 стәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсү вә ихтијари
 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси үчүн $f(\xi_k) = C$
 олдуғундан верилмиш функциянын
 интеграл чәми

$$= C(x_1 - x_0) + C(x_2 - x_1) + \dots +$$

$$+ C(x_k - x_{k-1}) + \dots + C(x_n - x_{k-1}) =$$

$$= C(x_n - x_0) = C(b-a)$$

ә ја



Шәкил 5

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} C(b-a) = \int_a^b C dx.$$

(2) интеграл чәминдән көрүндүјү кими $f(x)$ функциясы-
 нын $[a, b]$ парчасында интегралланан олмасы үчүн бу функ-
 циянын мәддуд олмасы зәруридир. Башга сөзлә $[a, b]$ пар-
 часында мәддуд олмајан функция Римана көрә интегралланан
 ејил.

$[a, b]$ парчасынын истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсүнү көтүрәк. $f(x)$
 функциясы $[a, b]$ -дә мәддуд олмадығындан онда һеч олмасы
 ир хусуси парчада, мәсәлән $[x_{k-1}, x_k]$ -да гејри-мәддуд ола-
 аг. Јердә галан хусуси чәмләрә дахил олан $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1},$
 \dots, ξ_n нөгтәләрини ихтијари оларак сечәк вә

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

лә ишарә едәк.

$f(x)$ функциясы $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында гејри-мәддуд олду-
 гундан, истәнилән $M > 0$ әдәди үчүн елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөг-
 тәси вар ки, $|f(\xi_k)| \geq \frac{\sigma_1 + M}{\Delta x_k}.$

Ахырынчыдан, $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \geq \sigma_1 + M$ олар. Онда

$$\sigma = \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| = |\sigma_1 + f(\xi_k) \Delta x_k| \geq$$

$$\geq |f(\xi_k)| \Delta x_k - |\sigma_1| \geq M.$$

Демәли, ихтијари $M > 0$ әдәди үчүн һәм шә елә бөлкү тапмаг олар ки, онун диаметри сыфра јахынлашдыгда буна ујгун интеграл чәми $\sigma \mid > M$ олар. Лежан Дирихл,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ расионал нөгтә олдугда,} \\ 0, & x \text{ иррасионал нөгтә олдугда} \end{cases}$$

функцијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд олмасына бахмаја-раг Римана көрә интегралланан деј л. Доғрудан да ξ_k әвәзи-нә расионал нөгтәләр көтүрсәк, буна ујгун интеграл чәми:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a,$$

иррасионал нөгтәләр көтүрсәк исә буна ујгун интеграл чәми

$$\sigma = \sum_{k=1}^n D(\eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

олур.

Беләликлә, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ вә $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ -ныҥ сечилмәси лә Дирихле функцијасынын интеграл чәми $\sigma(\xi) = b - a \neq 0$ ә $\sigma(\eta) = 0$ олур. Буна көрә лә Дирихле функцијасынын ин-теграл чәминин лимити јохдур.

§ 3. АШАҒЫ ВӘ ЈУХАРЫ ДАРБУ ЧӘМЛӘРИ

$f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд, $\{x_k\}$ исә һә-мин парчанын истәнглән бөлкүсү олсун. Бу функција парчада мәһдуд олдуғундан һәммин парчанын ихтијари $[x_{k-1}, x_k]$ һиссә-синдә дә мәһдуд олар. Одур ки, $f(x)$ функцијанын $[a, b]$ парчасынын һәр бир хүсүси $[x_{k-1}, x_k]$ һиссәсиндә ашағы m_k вә јухары M_k дәғиг сәрһәдләри вар.

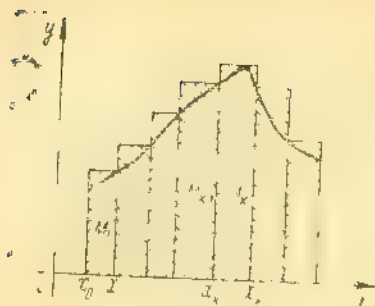
Беләликлә,

$$M_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x); \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x).$$

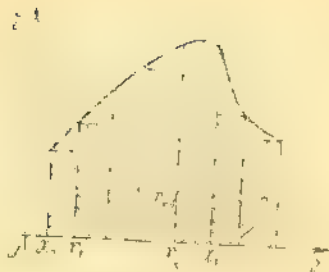
Тә’риф 1. $[a, b]$ парчасынын $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ ($k = \overline{1, n}$) һиссәләриндә функцијанын дәғиг ашағы вә дәғиг јухары сәр-һәдләрини ујгун олараг һәммин парчаларын узунлуғларын вуруб топладыгда алынған

$$s = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k,$$

Гастон Дарбу (1812-1917) франсыз ријазиијатчысыдыр, 1887—1896 чы илләрдә сәғләр нәзәријәсинә аңч 4 чилдик фундаментал әсәр јазмышдыр.



Шәкил 6



Шәкил 7

$$S = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

чәмләринә ашагы вә јухары Дарбу чәмләри бејилир.

Дарбу чәмләринин һәндәси мә'насы

Абсис оху үзәриндә көтүрүлмүш $[a, b]$ парчасы, һәммин парчада мәнфи олмајан кәсилмәз $y = f(x) \geq 0$ функциясынын графиги вә Ox охуна перпендикулјар $x = a$, $x = b$ үз хәтләри влә әһәтә олунмүш әјрихәтли трапесијаны нәзәрден кечирәк.

Вејерштрас* теореминә көрә парчада кәсилмәз функция өзүнүн ән бөјүк вә ән кичик гүјмәтнин алдыгы үчүн, јухары Дарбу чәми, әјрихәтли трапесијаны дахилинә адан пилләвары фигурун сәһәсинә (шәкил 6), ашагы Дарбу чәми вә әјрихәтлн трапесијанын дахилиндә јерләшән пилләвары фигурун сәһәсинә бәрәбәрдәр (шәкил 7).

Јухары вә ашагы Дарбу чәмләринин гурулмасына анд м.сал.

Мисал. $[0, 1]$ парчасында тәјјин олунмүш $f(x) = x^2$ функциясы үчүн ашагы вә јухары Дарбу чәмләринин гурмалы (шәкил 8).

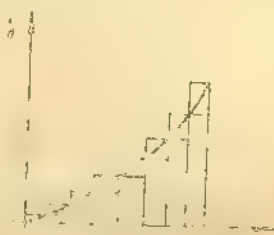
■ $[0, 1]$ парчасыны n бәрәбәр һиссәјә бөләк. Парчалары үчүн олараг

$$\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], \Delta_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots,$$

$$\Delta_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \dots, \Delta_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

лә ишарә едәк.

$f(x) = x^2$ функциясы $[0, 1]$ парчасында артан олдуғундан һәр бир



Шәкил 8

* Карл Вејерштрас (1815-1897) мәшһур алман ријазийәтчысыдыр.

$\Delta_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ парчасында функцијанын эн кичик вэ эн бөјүк гијмәти ујгун оларар

$$m_k = \left(\frac{k-1}{n} \right)^2; \quad M_k = \left(\frac{k}{n} \right)^2$$

олар. Демәли,

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \left(\frac{1}{n} \right)^2; \quad m_3 = \left(\frac{2}{n} \right)^2, \dots, \quad m_k = \left(\frac{k-1}{n} \right)^2, \dots,$$

$$m_n = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2,$$

$$M_1 = \left(\frac{1}{n} \right)^2, \quad M_2 = \left(\frac{2}{n} \right)^2, \dots, \quad M_k = \left(\frac{k}{n} \right)^2, \dots, \quad M_n = 1 = \left(\frac{n}{n} \right)^2;$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_k = \dots \quad \Delta x_n = \frac{1}{n}$$

олар. Онда

$$s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2].$$

$$\text{Дикәр тәрәфдән } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ олдуğunu нәзәр}$$

рә алсаг,

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} m_k \Delta x_k = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Бурадан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s = \lim_{n \rightarrow \infty} S = \frac{1}{3}.$$

Интеграл чәминин хассәси

Мәддуд $f(x)$ функцијасы үчүн, $[a, b]$ парчасынын рәстәзилән $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујгун интеграл чәми, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) нөгтәсинин сечилмәсиндән асылы олмајараг ашагъ

Дарбу чәминдән кичик, җухары Дарбу чәминдән исә бөҗүк
деҗилдир. Јә'ни,

$$s \leq \sigma \leq S.$$

◀ Бурада s вә S , $\{x_k\}$ бөлкүсүнә уҗун ашағы вә җухары
Дарбу чәмләридир. Шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ пар-
часында мәһдуддур. Демәли, истәнилән $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси
үчүн

$$m_k < f(\xi_k) \leq M_k \quad (1)$$

олар. (1) бәрабәрсизлијини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ вуруб топла-
саг.

$$s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S. \quad \blacktriangleright$$

Лемма 1. Тутаг ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә тә'јин едил-
миш мәһдуд функцијадыр. $[a, b]$ парчасынын гејд олунмуш
ихтијари $\{x_k\}$ бөлкүсү, $\varepsilon > 0$ исә ихтијари мүсбәт әдәд
оларса, бу һал үчүн $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) аралыг нөгтә-
сини елә сечмәк мүмкүндүр ки, интеграл чәми илә җухары
Дарбу чәми үчүн

$$0 \leq S - \sigma(\xi_k) < \varepsilon \quad (2)$$

вә $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ аралыг нөгтәсини елә сечмәк олар ки, ин-
теграл чәми илә ашағы Дарбу чәми

$$0 \leq \sigma(\eta_k) - s < \varepsilon \quad (3)$$

бәрабәрсизлијини өдәјәр.

◀ Әввәлчә (2) бәрабәрсизлијини исбат едәк. Шәртә көрә: 0
 $\{x_k\}$ гејд олунмуш ихтијари бөлкүдүр. Тә'рифә көрә

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x).$$

Ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) тапмаг олар

$$0 \leq M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (4)$$

олун.

(4) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) > 0$
в.рус топласаг

$$0 \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

ја $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$ алынар.

(3) бәрабәрсизлији аналожни исбат едлilir.

Нэгигэгэн, $\inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = m_k$ олдугундан, истэнилэн $\varepsilon > 0$ жөрө елэ $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтэси тапмаг олар ки.

$$0 \leq f(\eta_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (5)$$

(5) барабэрсизлижинин нэр тэрэфини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ вуруб топласаг

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon$$

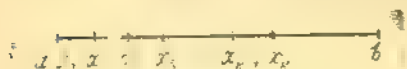
вэ ја

$$0 \leq \sigma - s < \varepsilon. \quad \blacktriangleright$$

§ 4. ДАРБУ ЧЭМЛЭРИНИН ХАССЭЛЭРИ

Хассэ 1. Верилмиш бөлкүжэ јени бөлкү нөгтэлэри элава етдикдэ ашагы Дарбу чэми азалмыр, јухары Дарбу чэми ісэ артмыр.

◀ $[a, b]$ парчасынын биринчи $\{x_k\}$ бөлкүсүнэ үјгүн ашагы вэ јухары Дарбу чэмлэрини s_1 вэ S_1 илэ ишарэ етсэк (шэкил 9),

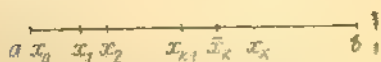


Шэкил 9

$$s_1 = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_k(x_k - x_{k-1}) + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

$$S_1 = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_k(x_k - x_{k-1}) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

олар. Верилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсүнэ јени бир $\tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтэси дахил етмэклэ алынан $\{x'_k\}$ бөлкүсүнэ үјгүн Дарбу чэмлэри



Шэкил 10

$$s_2 = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + \tilde{m}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) + \dots + \tilde{m}_n(\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}) + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

$$S_2 = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + \tilde{M}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) + \dots + \tilde{M}_n(\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}) + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

◊ (шэкил 10).

Беләликлә, S_1 -ин $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујгун ифадәсиндә $m_k \Delta x_k$ һәдди, S_2 -нин $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујгун ифадәсиндә $\tilde{m}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) + \tilde{\tilde{m}}_k(x_k - \tilde{x}_k)$ ики һәддин чәми илә свез едилир.

Бурада $\inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = \tilde{m}_k$, $\inf_{\tilde{x}_k \leq x \leq x_k} f(x) = \tilde{\tilde{m}}_k$ олдуғундан дәгиг ашағы сәрһәдин тә'рифинә көрә

$$m_k \leq \tilde{m}_k, \quad (1)$$

$$m_k \leq \tilde{\tilde{m}}_k \quad (2)$$

олар. (1) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $(\tilde{x}_k - x_{k-1}) > 0$, (2) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $(x_k - \tilde{x}_k) > 0$ вуруб,

$$m_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) \leq \tilde{m}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1})$$

$$m_k(x_k - \tilde{x}_k) \leq \tilde{\tilde{m}}_k(x_k - \tilde{x}_k),$$

сонра топласағ,

$$\tilde{m}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) + \tilde{\tilde{m}}_k(x_k - \tilde{x}_k) \geq m_k(x_k - x_{k-1})$$

олдуғу алынар. Бу ахырынчы бәрабәрсизлик $S_1 \leq S_2$ олдуғуну көстәрир. Аналожи оларағ јухары Дарбу чәминин анчағ азалан олдуғуну көстәрмәк олар. Бу мәгсәдлә $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујгун јухары Дарбу чәмини S_1 вә $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујгун јухары Дарбу чәмини S_2 илә ишарә едәк.

S_1 ифадәсиндә $M_k(x_k - x_{k-1})$ һәддинин әвәзинә S_2 -дә $\tilde{M}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) + \tilde{\tilde{M}}_k(x_k - \tilde{x}_k)$ чәми иштирак едир.

$$\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = \tilde{M}_k; \quad \sup_{\tilde{x}_k \leq x \leq x_k} f(x) = \tilde{\tilde{M}}_k$$

олдуғундан вә функцијанын $[a, b]$ парчасынын һисәләриндә дәгиг јухары сәрһәдди бүтүн парчадакы дәгиг јухары сәрһәддини ашмадығыны нәзәрә алсағ

$$\tilde{M}_k \leq M_k, \quad (3)$$

$$\tilde{\tilde{M}}_k \leq M_k \quad (4)$$

олар. (3) вә (4) бәрабәрсизликләрини ујгун оларағ

$$(\tilde{x}_k - x_{k-1}) > 0 \text{ вә } (x_k - \tilde{x}_k) > 0$$

бәрабәрсизликләринә вуруб топласағ,

$$\tilde{M}_k(\tilde{x}_k - x_{k-1}) + \tilde{\tilde{M}}_k(x_k - \tilde{x}_k) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

алынар. Бу исә $S_2 \leq S_1$ олдуғуну көстәрир. ►

Хассэ 2. $[a, b]$ парчасынын мүхтәлиф бөлкүсүнүн ашагы Дарбу чәми ихтијари бөлкүјә ујгун јухары Дарбу чәмләринин һеч бириндән бөјүк дејил.

◀ $[a, b]$ парчасынын ихтијары ики $\{x'_k\}$ вә $\{x''_k\}$ бөлкүсүнү көтүрәк.

$$a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{k-1} < x'_k < \dots < x'_{n-1} < x'_n = b$$

бөлкүсүнә ујгун Дарбу чәмләрини s_1 вә S_1 илә, икинчи $a = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_{k-1} < x''_k < \dots < x''_{n-1} < x''_n = b$ бөлкүсүнә ујгун Дарбу чәмләрини s_2 вә S_2 илә ишарә едәк.

Биринчи $\{x'_k\}$ вә икинчи $\{x''_k\}$ бөлкүләрини бирләшдириб үчүнчү $\{x_k\}$ бөлкүсүнү алаг. Ахырынчы бөлкүјә ујгун Дарбу чәмләрини s_3 вә S_3 илә ишарә едәк. Биринчи хассәјә әсасән

$$s_1 \leq S_3; \quad S_3 \leq S_2 \quad (5)$$

вә Дарбу чәмләринин тә'рифинә көрә

$$s_3 \leq S_3$$

олар. (5) вә (6) барабәрсизликләриндән:

$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2.$$

Аналоги олараг $s_2 \leq S_1$. ▶

Нәтичә. $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәһдуд $f(x)$ функцијасы үчүн ашагы вә јухары Дарбу чәмләри чохлагу дүзәлтмәк олар. Икинчи хассәјә көрә ашагы Дарбу чәмләри чохлагу јухарыдан (мәсәлән, истәнилән јухары Дарбу чәминдән бөјүк дејил) вә јухары Дарбу чәмләри чохлагу исә ашагыдан (мәсәлән, истәнилән ашагы Дарбу чәминдән кичик дејил) мәһдуддур. Демәли, $[a, b]$ парчасынын ихтијари бөлкүләринә ујгун, верилмиш функцијанын јухары Дарбу чәмләри чохлагунун дәгиг ашагы сәһәди вә ашагы Дарбу чәмләри чохлагунун исә дәгиг јухары сәһәди вардыр.

Тә'риғ 1. $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында мүмкүн олан бүтүн бөлкүләринә ујгун $\{S\}$ јухары Дарбу чәмләри чохлагунун дәгиг ашагы сәһәдинә $f(x)$ функцијасынын јухары Дарбу интегралы, һәмин функцијанын $\{s\}$ ашагы Дарбу чәмләри чохлагунун дәгиг јухары сәһәдинә исә функцијанын ашагы Дарбу интегралы дејилир вә ујгун

олараг: $\bar{J} = \int_a^b f(x) dx$ (јухары Дарбу интегралы) вә $J =$

$-\int_a^b f(x) dx$ (ашагы Дарбу интегралы) кими ишарә етилир.

Лемма 2. Ашагы Дарбу интегралы J хары Дарбу интегралыны ашмыр:

$$\underline{J} \leq \bar{J}.$$

◀ Эксини фэрз едэк. Ја'ни $\underline{J} > \bar{J}$ олсун. Белә олдугда, $\underline{J} - \bar{J} = \varepsilon > 0$ олар. Дякэр тэрәфдән J хары Дарбу интегралынын тә'рифинә көрә $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вар ки, буна ујгун J хары Дарбу чәми үчүн

$$S' < \bar{J} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Аналожи олараг $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсүнү көстәрмәк олар ки, буна ујгун ашагы Дарбу чәми ашагыдакы бәрабәрсизлији өдәјир, ја'ни

$$s'' > \underline{J} - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

(7) вә (8) бәрабәрсизликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг,

$$S' - s'' < \bar{J} + \varepsilon \text{ вә } \bar{J} - \underline{J} = -\varepsilon$$

олдугуну нәзәрә алсаг, $S' - s'' < 0$ вә ја $s'' > S'$ алынар. Бу исә Дарбу чәмләринин икинчи хассәсинә аиддир. Демәли, $\underline{J} \leq \bar{J}$ олар. ▶

$[a, b]$ парчасынын ихтијары бөлкүсү $\{x_k\}$ вә бу бөлкүнүн диаметри λ олсун. $\{x_k\}$ бөлкүсүнә l сәјдә ихтијари јени нөгтә дахил едилдикдән сонра ал лнан бөлкүнү $\{x'_k\}$ илә ишарә едәк. S вә s чәмләри $\{x_k\}$ бөлкүсүнә, S_1 вә s_1 исә $\{x'_k\}$ бөлкүсүнә ујгун Дарбу чәмләридирсә, онда ашагыдакы лемма доғрудур.

Лемма 3. $S - S_1$ вә $s_1 - s$ фәргләри үчүн

$$S - s_1 \leq (M - m)l\lambda, \quad s_1 - s \leq (M - m)l\lambda$$

бәрабәрсизликләри доғрудур. Бурада

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x); \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

Үмумилији позмадан $\{x_k\}$ бөлкүсүнә јеканә јени \tilde{x} нөгтәсини дахил едиб,

$$S - S_1 \leq (M - m)\lambda$$

$$s_1 - s \leq (M - m)\lambda, \quad (l = 1)$$

бәрабәрсизликләринин доғру олдуғуну исбат едәк.

$\tilde{x} \in [x_{k-1}, x_k]$ олсун. Бу һалда $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујгун J хары S Дарбу чәминдә иштирак едән һәдләрдән анчаг бир

$M_k \Delta x_k$ һәдди, $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун S_1 Дарбу чәминин ики $M'_k(\tilde{x} - x_{k-1})$, $M''_k(x_k - \tilde{x})$ һәдләри чәми илә әвәз едилир. (Бурада M_k , M'_k , M''_k , m_k , m'_k , m''_k , $f(x)$ функцијасынын; ујғун олараг $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k-1}, \tilde{x}]$, $[\tilde{x}, x_k]$ парчаларында дөгәг јухары вә ашагы сәрһәдләридир.) S вә S_1 чәмләринин галан бүтүн һәдләри ејнидир. Демәли,

$$S - S_1 = M_k \Delta x_k - [M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \tilde{x})]$$

олар. Дәгиг сәрһәддин хәсәсләринә әсәсэн,

$$M_k \leq M; m \leq m'_k, m_k \leq M''_k.$$

Бунлары нәзәрә алсаг,

$$\begin{aligned} S - S_1 &\leq M_k \Delta x_k - m[(\tilde{x} - x_{k-1}) + (x_k - \tilde{x})] = \\ &= (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) \lambda \end{aligned}$$

алынар. Аналожи олараг ашагы Дарбу чәмләринин фәрги үчүн дә $s_1 - s \leq (M - m) \lambda$ олдуғуну көстөрмәк олар. Догрудан да $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун ашагы Дарбу чәминин, јә'ни s -ни бир $m_k \Delta x_k$ һәдди, $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун s_1 Дарбу чәминдә ики һәддин чәми $m'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) + m''_k(x_k - \tilde{x})$ илә әвәз едилир. Бу чәмләрин галан һәдләринин һамысы ејни олдуғундан

$$s_1 - s \leq m'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) + m''_k(x_k - \tilde{x}) - m_k \Delta x_k$$

олар.

$$m'_k \leq m_k \leq M, \quad m''_k \leq M_k \leq M$$

вә $m \leq m_k$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\begin{aligned} S_1 - S &\leq M[(\tilde{x} - x_{k-1}) + (x_k - \tilde{x})] - m \Delta x_k = \\ &= (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) \lambda. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Тә'риф 2. $\forall \varepsilon > 0$ көрә елә $\delta > 0$ тапмаг мүмкүнәүрсә ки, $\lambda < \delta$ олдуғда $S - A < \varepsilon$ оларса, A әдәдинә јухары Дарбу чәмләринин лимити дејилир, вә $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = A$ кими јазылып.

Ашагы Дарбу чәмләринин лимитинин дә тә'рифи аналожи олараг верилир. Белә ки ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\delta > 0$ тапмаг мүмкүнәүрсә ки, $\lambda < \delta$ олдуғда $|S - B| < \varepsilon$ оларса, B әдәдинә ашагы Дарбу чәмләринин лимити дејилир вә $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = B$ јазылып.

Дарбу леммасы. Јухары Дарбу чәминин лимити (бөлкүнүн диаметри $\lambda \rightarrow 0$ олдуғда) јухары Дарбу интегралына вә ашагы Дарбу чәминин лимити ашагы Дарбу интегралына бәрәбәрлир.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \bar{J}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \underline{J}.$$

◀ Эввалча лемманын биринчи хиссәсини исбат едек.

Хүсуси һалда $f(x) = C = \text{const}$ оларса, истәнилән бөлкү үчүн $S = C(b-a) = \bar{J}$ вә демәли, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \bar{J}$ олур. $f(x)$ функсиясы сабит олмајан һал үчүн,

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) > m = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

Јухары Дарбу интегралынын тәрифинә әсасән истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вар ки, буна ујғун Јухары Дарбу чәми

$$\bar{S} - J < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

шәртини өдәјир.

$[a, b]$ парчасынын үч нөгтәләри илә үст-үстә дүшмәјән бөлкү нөгтәләринин саяһны l илә ишарә едәк.

Фәрз едәк ки, $\{x_k\}$ бөлкүсү, диаметри

$$\lambda < \delta = \frac{\varepsilon}{2l(M-m)} \quad |$$

бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари бөлкүдүр вә S онун Јухары Дарбу чәмидир.

$\{x_k\}$ бөлкүсүнә, јени l саяда нөгтәләр ғлавә етмәклә алын бөлкүнү $\{x'_k\}$ илә ишарә едәк.

Лемма 3-ә көрә бу бөлкүнүн Јухары S' Дарбу чәми

$$0 \leq S - S' \leq (M - m)\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

шәртини өдәјир.

Дикәр тәрәфдән $\{x'_k\}$ бөлкүсүнү, башга јолла да алмағ олар. Бунун үчүн $\{x_k\}$ бөлкүсүнә $\{x'_k\}$ бөлкүсүнүн $[a, b]$ парчасынын үч нөгтәләри илә үст-үстә дүшмәјән нөгтәләрини ғлавә етмәк кифајәтдир. Одур ки, \bar{J} -нин тәрифинә вә Дарбу чәмләринин биринчи хиссәсинә әсасән:

$$\bar{J} \leq S' \leq \bar{S} \quad \text{вә} \quad 0 \leq S' - \bar{J} \leq S' - \bar{J} \quad (11)$$

(9) бәрабәрсизлијини нәзәрә алсағ, ахырынчы (11) бәрабәрсизлији

$$0 \leq S' - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12)$$

олар. (12) вә (11)-дән

$$S'_1 - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S - S' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сонунчу барабарсизликлери тэрэф-тэрэфэ тэпласаг, $S - \bar{f} < \varepsilon$ алынар. Демели, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \bar{J}$ олар. ►

Ашагы Дарбу чэми үчүн $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \underline{J}$ олдугу аналожи оларак исбат едилер.

Теорем 1. $[a, b]$ парчасында мэхдуд $f(x)$ функциясынын хэмин парчада интегралланан олмасы үчүн $\underline{J} = \bar{J}$ олмасы зэрури вэ хэм дэ кафидир.

◄ Шэрт зэруридир $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функциясынын Римана көрөинтегралланан олдугуну фэрз едек. Белэ олан халда бу функциясанын интеграл чэминин $(\lambda \rightarrow 0)$ сонлу лимити вар. Интеграл чэминин лимитинин тэрифине көрө елэ $\delta > 0$ вар ки, $\{x_k\}$ бөлкүсүлүн истэнилен дахили ξ_k нөгтөси үчүн $\lambda < \delta$ олдугда $|J - \sigma(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$ барабарсизлији өдөнилер. Лемма 1-э эсасэн верилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсүндэ $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтэлэрини елэ сечмэк олар ки,

$$S - \sigma(\xi'_k) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ вэ } \sigma(\xi''_k) - s < \frac{\varepsilon}{4} \quad (13)$$

өдөнилер. Дикэр тэрэфдэн верилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн ејни заманда

$$|J - \sigma(\xi'_k)| < \frac{\varepsilon}{4}; \quad |J - \sigma(\xi''_k)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (14)$$

барабарсизликлери дэ өдөнилер.

$$S - s = [S - \sigma(\xi'_k)] + [\sigma(\xi'_k) - J] + [J - \sigma(\xi''_k)] + [\sigma(\xi''_k) - s]$$

ејнилчине бахаг.

Чэмин модулу модуллары чэминден бөјүк дејилдир. Онда (13), (14) барабарсизликлерини нэзэрэ алсаг,

$$S - s < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \quad (15)$$

Дикэр тэрэфден истэзилэи бөлкү үчүн

$$s \leq \underline{J} \leq \bar{J} \leq S \quad (16)$$

олдугундан, (15) барабарсизлијини нэзэрэ алсаг,

$$0 \leq \bar{J} - \underline{J} < \varepsilon$$

олар, ε ихтијари олдугундан, $\underline{J} = \bar{J}$.

Шэрт кафидир. Јэ'ни

$$\underline{J} = \bar{J} = A \quad (17)$$

оларса,

$f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланан олмасыны көстөрмөк лажымдыр. Бурада $\overline{J} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S$, $\underline{J} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s$ олдуғундан, (16) барабарсызлыгыннан вә (17) барабарлыгыннан ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, истәнилән $\lambda < \delta$ шәртини өдәјән бөлкү үчүн

$$J - s = A - s < \varepsilon; \quad S - \overline{J} = S - A < \varepsilon, \quad (18)$$

олар.

Интеграл чәминин

$$s \leq \sigma(\xi_k) \leq S$$

хәссәсини (18)-дә нәзәрә алсаг,

$$A - \varepsilon < s < \sigma(\xi_k) < A + \varepsilon$$

вә ја

$$A - \sigma(\xi_k) < \varepsilon.$$

Сонунчу барабарсызлык $\lambda < \delta$ шәртини өд јән истәнилән бөлкү үчүн дегрудур. Ахырынчыдан $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ алынар. Бу исә функцијанын интегралланан олдуғуну көстөрир. ►

Теорем 2. (Әсәс теорем) $[a, b]$ парчасында мәһдуд $f(x)$ функцијасынын интегралланан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәси үчүн елә $\{x_k\}$ бөлкүсүнүн олмасыдыр ки, $S - s < \varepsilon$ шәрти өдәнилис.

► Шәрт зәруридир. Јәни $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында интегралланан олмасы верилир. Бундан сәвәлки теоремдә көстәрди ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланан олдугда ихтијари $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $\lambda < \delta$ шәртини өдәјән, истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн $S - s' < \varepsilon$ өдәнилис.

Шәрт кафидир. Истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вар ки, $S - s < \varepsilon$ сәјәр. Көстәрәк ки, функција һәмин парчада Римана көрә интегралланандыр. (16) барабарсызлыгыннан

$$s \leq \underline{J} \leq J \leq S$$

вә ахырынчы барабарсызлыкта $S - s < \varepsilon$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\overline{J} - \underline{J} < \varepsilon$$

олар, ε ихтијари олдуғундан $J = \underline{J}$ алынар. бу исә бундан габәтки теоремә әсәсән функцијанын интегралланан олмасыны көстәрир. ►

Теорем 1. $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функција һәм мин парчада Римана көрә интегралланандыр.

◀ $[a, b]$ парчасыны n сәйда $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) кими парчалара бөләк. Шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә кәсилмәздир. Демәли, һәм мин функција бу кичик парчаларын һәр бириндә дә кәсилмәз олар. Дикәр тәрәфдән Вејерштрасын икинчи теореминә әсасән $f(x)$ функцијасы кичик парчаларда да өзүнүн ән кичик вә ән бөјүк гијмәтләрини алыр. Бу гијмәтләри ујғун олараг m_k вә M_k ($k = \overline{1, n}$) илә ишарә етсәк,

$$s = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

олар. $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында елә $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәләри вар ки, $f(\xi'_k) = M_k$; $f(\xi''_k) = m_k$ олар. Бу гијмәтләри нәзәрә алсаг,

$$S - s = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [f(\xi'_k) - f(\xi''_k)] (x_k - x_{k-1}) \quad (1)$$

олар. Функција кәсилмәз олдуғундан һәм мин парчада мүнтәзәм кәсилмәздир.

Јә'ни ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ вардыр ки, $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) парчасындан көтүрүлмүш ихтијари $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәләри үчүн $[\xi'_k - \xi''_k] < \delta$ олдуғда

$$f(\xi'_k) - f(\xi''_k) < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

өдәниләр. Әкәр $\{x_k\}$ бөлкүсүнү елә сечсәк ки, $\lambda < \delta$ олсун, онда (1)-дән

$$S - s = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a} (x_k - x_{k-1})$$

вә ја

$$S - s < \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon$$

олар. Бу исә $f(x)$ функцијасынын Римана көрә интегралланан олдуғуну көстәрир. ►

Теорем 2. $[a, b]$ парчасында монотон функција һәм мин парчада Римана көрә интегралланандыр.

◀ $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында азалмајан олан һала бахаг. $f(x) = \text{const}$ олдугда теорем ашкардыр. О курки, $f(b) > f(a)$ фэрз едәчәйик. $\varepsilon > 0$ ихтијари мүсбәт әдәд олсун.

$[a, b]$ парчасыны, диаметри λ олан $\{x_k\}$ бөлкүсү илә n һиссәјә бөләк вә $\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ гәбул едәк.

$$S - s = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \quad (2)$$

фәргини гијмәтләндирәк. Бурада M_k вә m_k , $f(x)$ функцијасынын $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) парчасында ујгун олараг дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләридир. (2)-дән

$$S - s < \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{M_k - m_k}{f(b) - f(a)} \quad (3)$$

Азалмајан функција үчүн

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) = f(b) - f(a) \quad (4)$$

олар (бурада $M_k = m_{k+1}$ ($k = \overline{1, n}$), $M_n = f(b)$, $m_1 = f(a)$), (4) вә (3)-дән $S - s < \varepsilon$ алынар. Демәли, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланандыр. ▶

Теорем 3. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмиш мәһдуд функција оларса вә истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн бу функцијанын бүтүн кәсилмә нөгтәләрини өртән вә узунлуғларынын үмуми чәми ε -дан кичик олан сонлу сәјдә интерваллар көстәрмәк мүмкүндүрсә, онда $f(x)$ функцијасы һәмин парчада Римана көрә интегралланандыр.

◀ $[a, b]$ парчасында функцијанын дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләрини ујгун олараг M вә m илә ишарә едәк. Бурада ики һала бахаг:

1) $f(x) = M = m = \text{const}$. Бу һал үчүн $f(x)$ функцијасынын интегралланан олдуғуну көрдүк.

2) $M > m$ олан һала бахаг. $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олсун. $f(x)$ функцијасынын кәсилмә нөгтәләрини, узунлуғлары чәми

$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(M - m)}$ әдәдини ашмајан сонлу сәјдә интервалларла

өртәк. $[a, b]$ парчасынын бу интерваллара дахил олмајан нөгтәләри сонлу сәјдә кәсишмәјән парчалар чохлуғуну тәшкил едир. Бунлара әләвә парчалар дејәк. Әләвә парчаларын һәр бириндә $f(x)$ функцијасы кәсилмәз олдуғундан Кантор теореминә әсасән, һәмин парчаларда мүнтәзәм кәсилмәз олар.

Жә'ни ихтијари $\epsilon > 0$ әдәдиә көрә елә $\delta_i > 0$ тапмағ олар ки, i -чи парчаја дахил олан истәнилән ξ', ξ'' нөгтәләри үчүн

$$|\xi' - \xi''| < \delta_i \text{ олдуғда } |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \text{ олур. } \delta = \min_i \delta_i$$

олсун. Әләвә парчалары елә бөлкү илә хүсуси һиссәләрә бөләк ки, бунларын һәр биринин узунлуғу δ -дән бөјүк олмасын, онда k -чы хүсуси парчада $f(x)$ функцијасынын дәғиг јухары вә ашағы сәрһәдләри фәрғи $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ -дән бөјүк олмаз.

Әләвә парчалары вә бу парчаларын учлары илә бирләшән јухарыда сөјләдијимиз сонлу сәјдә интервалларын бүтүн бөлкүләрини бирләшдирсәк, $[a, b]$ парчасынын $\{x_k\}$ бөлкүсүнү аларығ. $[a, b]$ парчасынын үмуми $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн

$$S - s = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \Sigma' (M_k - m_k) \Delta x_k + \Sigma'' (M_k - m_k) \Delta x_k \quad (5)$$

алынар. (5) барабәрлијинин сәғ тәр.финдәки биринчи чәм кәсилмә нөгтәләрини өргән интервалларын бөлкүсүнә ујғун чәмдир. Икинчиси исә јердә галан бүтүн һиссәләрин бөлкүсүнә ујғун чәмдир.

Истәнилән k үчүн $M_k - m_k \leq M - m$ олдуғундан,

$$\Sigma' (M_k - m_k) \Delta x_k \leq (M - m) \Sigma' \Delta x_k < \frac{\epsilon}{2}.$$

$f(x)$ функцијасы әләвә парчаларда мүнтәзәм кәсилмәз олдуғундан,

$$\Sigma'' (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2}$$

Беләликлә, елә $\{x_k\}$ бөлкүсү көстәрдик ки, бунун үчүн $S - s < \epsilon$ олур.

Демәли, $f(x)$ интегралланан ыр. ►

Нәтичә 1. $[a, b]$ парчасында мәһдуд вә һәмийн парчада сонлу сәјдә кәсилмә нөгтәләри олан $f(x)$ функцијасы һәмийн парчада интегралланандыр. Хүсуси һалда $[a, b]$ -дә һиссә-һиссә кәсилмәз функција һәмийн парчада интегралланандыр. Һәғигәтән, бундан габағкы теоремин шәрғинә көрә, кәсилмә нөгтәләрини өргән барабәр узунлуғлу вә бөјү $\frac{\epsilon}{2p}$ -дән бөјүк олмајан интервалларын сечилм си кифајәтдир. Бурада p кәсилмә нөгтәләринин сәјдыр.

Гејд 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса вә $\varphi(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасынын сонлу сәјдә нөгтәләриндән башға пар-

Җердә $f(x)$ илә үст-үстә дүшәрсә, о һалда $\varphi(x)$ дә $[a, b]$ парчасында интегралланандыр вә

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Теорем 4. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, M вә m , $f(x)$ функцијасынын дәгиг јухары вә ашағы сәрһәдләридирсә вә $\varphi(x)$ функцијасы $[m, M]$ парчасында тә'јин олунмагла

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|.$$

Липшис шәртини өдәјирсә, о һалда $g(x) = \varphi[f(x)]$ мүрәккәб функцијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланар.

◀ Бурада $\forall x_1, x_2 \in [m, M]$ парчасындан көтүрүлмүш истә-нилән әдәд, L исә мүсбәт әдәддир. Шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандыр. Бу һалда $\varepsilon > 0$ үчүн $[a, b]$ -нин елә $\{x_k\}$ бөлкүсүнү тапмаг олар ки, $S^* - s^* < \frac{\varepsilon}{L}$ олар. $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун, $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) хусуси парчаларында $f(x)$ функцијасынын дәгиг ашағы вә јухары сәрһәдләри M_k, m_k ($k = \overline{1, n}$) олсун. $\varphi(x)$ функцијасы Липшис шәртини өдәдијиндән $\forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ нөггәләри үчүн

$$|g(x) - g(y)| = |\varphi[f(x)] - \varphi[f(y)]| \leq L |f(x) - f(y)| \leq L(M_k - m_k)$$

бәрабәрсизлији өдәнилик.

$g(x) - g(y) \leq L(M_k - m_k)$ олдуғундан, $M_k^* - m_k^* \leq L(M_k - m_k)$ олар. Догрудан да $[x_{k-1}, x_k]$ парчасына дахил олан елә ики $\{x_k\}$ вә $\{y_k\}$ ардычыллығыны тапмаг олар ки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_k) = M_k^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = m_k^*$$

$g(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасынын $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун јухары вә ашағы Дирбу чәмләрини S^* вә s^* илә ишәрә етсәк,

$$S^* - s^* = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq L \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon$$

олар. Бу исә $g(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында интегралланан олдуғуну көстәрир. ►

Инди исә даһа үмуми теорема исбат едәк.

Теорем 5. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, бу функцијанын $[a, b]$ парчасында

дэгиг јухары вэ ашағы сэрһэдләри M вэ m исэ, φ (f)
 функцијасы $[m, M]$ парчасында кәсилмәздирсэ, $g(x) = \varphi[f(x)]$ мүрәккәб функцијасы $[a, b]$ парчасында Рун-
 мана көрә интегралланандыр.

◀ $\max_{m \leq t \leq M} |\varphi(t)| = L$ вэ $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олсун. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon^2}{b-a+2L}$ ишарә едәк.

$\varphi(x)$ функцијасы $[m, M]$ -дә кәсилмәз олдуғундан Г. Кантор теореминә әсасән һәммин парчада мүнτζәәм кәсилмәзди.

Јә'ни $\forall s, t \in [m, M]$ нөгтәләри үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вә ки, $|s - t| < \delta$ олдуғда $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$ олар. δ -ны елә сечәк ки, $\delta < \varepsilon$ олсун. Шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланан олдуғундан $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вә ки, бу бөлкү үчүн $S - s < \delta^2$ алынар.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) &= M_k, & \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) &= m_k, \\ \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) &= M_k^*, & \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) &= m_k^* \end{aligned}$$

ишарә едәк.

1-дән n -ә кими там әдәдләри ики A вэ B чохлағуна бөлә белә ки $M_k - m_k < \delta$ оларса, $k \in A$ вэ $M_k - m_k > \delta$ олдуғда $k \in B$ олсун, $k \in A$ олдуғда $M_k - m_k < \delta$ олдуғундан вә φ (f) функцијасы $[m, M]$ парчасында мүнτζәәм кәсилмәјән олдуғуна көрә $M_k^* - m_k^* < \delta$ олар. Һәгигәтән $k \in A$ оларса,

$$M_k - m_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Башга сөзлә $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ олдуғда, $f(x) - f(y) = s - t$ фәрги мүтләг гижмәтчә δ -дан кичик олар. Јә'ни $|s - t| < \delta$ бурада $s = f(x)$, $t = f(y)$ олдуғу нәзәрдә тутулур. Беләликчә, φ функцијасынын $[m, M]$ парчасында мүнτζәәм кәсилмәјән олдуғуну нәзәрә алсағ,

$$|\varphi[f(x)] - \varphi[f(y)]| = |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Ахырынчы бәрабәрсизлик, $\forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ үчүн доғру олдуғундан, онда

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \varphi[f(x)] - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \varphi[f(x)] < \varepsilon$$

олар. $k \in B$ оларса, $M_k^* - m_k^* \leq 2L$ олур. $[a, b]$ парчасынын $\{x_k\}$ бөлкүсүнә ујғун $g(x)$ функцијасынын јухары вә ашағы Дарбу чәмләрини S^* вэ s^* ишарә етсәк

$$S^* - s^* = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k = \sum_{k \in A} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k +$$

$$+ \sum_{k \in B} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq \varepsilon_1 (b - a) + 2L \sum_{k \in B} \Delta x_k.$$

$\sum_{k \in B} \Delta x_k$ ифадәсини гижәтләндирәк.

$$\delta \cdot \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

(бурада $(M_k - m_k) \Delta x_k$ топланнларынын һамасынын мүсбәт олмасыннан истифадә едилир).

Сечилмиш $\{x_k\}$ бөлкүсү үчүн

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = S - s < \delta^2$$

олдугуну нәзәрә алсаг

$$\delta \cdot \sum_{k \in B} \Delta x_k + \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \delta^2$$

вә ја $\sum_{k \in B} \Delta x_k < \delta$ алынар. Беләликлә.

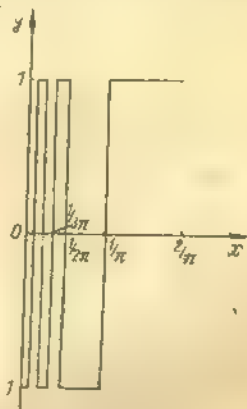
$$S^* - s^* \leq \varepsilon_1 (b - a) + 2L \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq \varepsilon_1 (b - a) + 2L\delta < \\ < \varepsilon_1 (b - a) + 2L) = \varepsilon,$$

бурада $\delta < \varepsilon_1$ олмасы нәзәрә алынмыштыр. Демәли, $g(x) = \varphi[f(x)]$ функцијасы Римана көрә интегралланандыр. ►

Нәтичә 2. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында Римана көрә интегралланандырса, онда $|f(x)|^2$ -да һәммин парчада интегралланандыр (бурада α истәғниләл мүсбәт әдәддир). Доғрудан да $\alpha \varphi(t) = t^\alpha$ кәсилмәз функција олдугундан, бундан габаггы теорем итәтбиг етмәк кифәјәтдир.

Хүсуси һалда $\alpha = 2$ көтүрсәк, $f^2(x)$ функцијасынын да интегралланан олдугуну көрәрик. Биз кәләчәкдә бу хүсуси һалдан истифадә едәчәјик.

Мисал. $f(x) = \text{sign} \sin \frac{1}{x}$ функцијасы $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ парчасында верилир вә $f(0) = 0$ олдуғу нәзәрдә тутулур (шәкил 11).



Шәкил 11

$x_k = \frac{1}{\pi k}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) нөггөлөрүнүн һамысы верилмиш функција үчүн биринчи нөв кәсилмә нөггөлөридир. Сыфыр нөггөсиз исә бу функција үчүн икинчи нөв кәсилмә нөггөсиздир. $\varepsilon > 0$ гејд едиб $x=0$ нөггөсизин $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ интервалы илә өртөк. Бу интервалын харичиндә бу функцијанын анчаг сонлу p сәјдә кәсилмә нөггөләри олар. p әдәди верилмиш ε -дә асылдыр. Бу нөггөләрин һәр бирини, узунлуғу $\frac{\varepsilon}{2p}$ -гән кичик интервалла өртөк.

Беләликлә, верилмиш функцијанын кәсилмә нөггөләри сонлу сәјдә интервалла өртүлмүш олур. Бу интервалларын үмуми узунлуғу $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$ -дан кичик олар. Демәли, бундан габагкы теоремә әсасән $f(x)$ функцијасы $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ парчасында интегралланандыр. Беләликлә, бу мисалда сонсу сәјдә кәсилмә нөггөсиз олан функцијанын интегралланан олдуғуну көстәрдик.

Гејд 2. $f(x)$ | функцијасынын интегралланан олмасындан үмуми, әтә, $f(x)$ функцијасынын интегралланан олмасы чыхмыр һәйгәтә, $[a, b]$ -дә тәјин олунмуш ($b > a$)

$$D_1(x) = \begin{cases} -1, & x\text{—иррационал олдуғда,} \\ 1, & x\text{—рационал олдуғда} \end{cases}$$

функцијасына баһаг.

$|D_1(x)| = 1$ олдуғу үчүн интегралланандыр. Такин истәнидән $\{x_n\}$ бөлкүсү үчүн $S = b - a$, $a < a < b$ олдуғундан функција интегралланан дејил $\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} S \neq \lim_{\lambda \rightarrow 0} s\right)$.

§ 6. МҮӘЛҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Теорем. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздирсә вә $F'(x) = f(x)$ оларса, онда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

(1) дүстуруна Нјутон—Лејбнис дүстуру дејилир. Бу дүстур интеграл һесабынын әсас дүстурудур.

Теорем белә дә ифадә етмәк олар:

$[a, b]$ парчасында $f(x)$ функцијасынын мүәлҗән интегралы бу функцијанын нбтидан функцијасынын интегралын јухары вә ашағы сәһнәдләриндәки гијмәтләри фәргинә барабардир.

◀ $F(x)$ ибтидаи функциясىнын

$$F(b) - F(a)$$

гijмэтлэри фэргинэ бахаг. Бу фэрг, ибтидаи функцијалар чоxлуғунун һэр бири диқариндэн сабитлэ фэрглэндијиндэн, ибтидаи функциянын сечилмэсиндэн асылы дејил.

Ашағыдакы ејнилијэ бахаг:

$$[F(b) - F(a)] = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] + \dots + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(b) - F(x_{n-1})],$$

бурада, $a = x, < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < \dots < x_n, < x_n = b$.

Сағ тэрэфдэки һэр бир фэргэ Лагранжыч соилу артым дүстүруну тэдбиг едэк:

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_0) &= F'(\xi_1)(x_1 - x_0), \\ F(x_2) - F(x_1) &= F'(\xi_2)(x_2 - x_1), \\ &\vdots \\ F(x_n) - F(x_{n-1}) &= F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

бурада,

$$\begin{aligned} x &< \xi_1 < x_1, \\ x_1 &< \xi_2 < x_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &< \xi_n < x_n = b. \end{aligned}$$

(1) бэрэбэрлик тэрини нэзэрэ алсаг, (2) ејнилијэ

$$F(b) - F(a) = F'(\xi_1)(x_1 - x_0) + F'(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \quad (4)$$

шэклиндэ олар.

Шэртэ көрө үх $x \in [a, b]$. $F'(x) = f(x)$ олдугу үчүн (4) ејнилијиндэн

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \quad (5)$$

олуғуну алырыг.

(5) ејнилијиния сағ тэрэфини

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (6)$$

интеграл чэми шэклиндэ јазсаг,

$$F(b) - F(a) = \sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

олар. (6) еңилијиндә $(x_k - x_{k-1})$ фэрглэринин ән бөлүүнүн узунлугуну λ илә ишарә едиб $\lambda \rightarrow 0$ јакыылашмагла лимитә кечсәк,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Сол тәрәф λ -дан асылы олмадығы үчүн исә

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacktriangleright$$

Гејд 1. $F(b) - F(a)$ фэрни $[F(x)]_a^b$ вә ја $F(b) - F(a)$ $F(x)$ |_a ими дә ишарә едиләр. Әни Нјутсн-Лејбнис дүстүру

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

шәклиндә јазылып.

Нјутон - Лејбнис дүстүрунүн үстүнлүлү ондадыр ки, интеграл чәми дүзәлтмәдән билаваситә мурәјән интеграл һесабы ланыр. Мисаллара баһар.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1. \quad \blacksquare$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

$$3. \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4 - 0 = 4. \quad \blacksquare$$

$$4. \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \ln 3 - \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \sqrt{3} + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Гејд 2. Нјутон Лејбнис дүстуру анча $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парча сында кәсилмәз олдугда тәтбиг едилир. Бу шәрт нәзәрә алынмаса һесаба ламада сәһв етмәк олар.

Мәсәлән, $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ интегралында Нјутон Лејбнис дүстуруну формал ола- раг тәтбиг етсәк,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{3}{2}.$$

Ләкин $\frac{1}{x^2}$ функцијасы $[-1, 2]$ -дә гејри мәһдуд олдуғундан интегралланан дејил

§ 7. МҮӘЛҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ХАССӘЛӘРИ

Гејд едәк ки, мүәлҗән интегралын тә'рифини биз $a < b$ олан һалда вермишик. Бу мәһдудијјәти арадан галдырмаг үчүн $a = b$ олдугда, $\int_a^b f(x) dx = 0$ вә $a > b$ олдугда $\int_a^b f(x) dx =$

$= -\int_b^a f(x) dx$ кими тә'җи едәчәјик.

Хәссә 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә интегралланандырса, онда $f(x)$, $[a, b]$ -нин дахилиндә јерләшән истәнилән $[c, d]$ парчасында да интегралланандыр.

◀ Функција $[a, b]$ -дә интегралланан олдуғундан истәни- лән $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\{x_k\}$ бөлкүсү вар ки, $S - s < \varepsilon$ олар. $\{x_k\}$ бөлкүсүнә c вә d нөггәләрини әләвә етсәк Дарбу чәмләрини- нин хәссәсинә кәрә јени бөлкүнүн јухары вә ашағы Дарбу чәмләри S' вә s' үчүн дә $S' - s' < \varepsilon$ бәрәбәрсизлији өдәни- ләр.

Инди исә бүтүн $[a, b]$ парчасыны бөлән $\{x_k'\}$ -нын $[c, d]$ -јә ујун бөлкүсүнү $\{x_k\}$ илә ишәрә едиб бу ахырынчы бөлкүјә ујун јухары вә ашағы Дарбу чәмләрини \bar{S} вә s илә ишәрә едәк. $S - s$ фәрғинин һәр бир мүсбәт $(M_k - m_k) \Delta x_k$ һәдди $S' - s'$ фәрғинә дахил олдуғуну нәзәрә алсаг, $\bar{S} - s \leq S' - s'$ олар. Демәли, $f(x)$ функцијасы $[c, d]$ -дә интегралланандыр.

Хәссә 2. $f(x)$ функцијасы $[a, c]$ вә $[c, b]$ парчаларында интегралланандырса, $[a, b]$ -дә дә интегралланандыр вә аша- ғыдакы бәрәбәрлик доғрудур:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

1) $a < c < b$ олсун. $\forall \varepsilon > 0$ сечж. $[a, c]$, $[c, b]$ парчаларынын ујгун олараг $\{x_k\}$ вэ $\{x_k''\}$ бөлкүлөрүнн едэ көгүрөк ки, бу парчаларын һәр бириндэ јухары вэ ашагы Дарбу чәмләри

үчүн $S - s < \frac{\varepsilon}{2}$ шәрти өдәнилсин. $[a, b]$ парчасынын $\{x_k\}$ вэ $\{x_k''\}$ бөлкүлөриндән дүзәлмиш јени бөлкүнү $\{\bar{x}_k\}$ илә ишарә едиб, буна ујгун јухары вэ ашагы Дарбу чәмләрини \bar{S} , \bar{s} илә көстәрсәк, $\bar{S} - \bar{s} < \varepsilon$ олар. Демәли, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандыр. Инди һәг рөгтәсини өз дахилиндә сахлајан $[a, b]$ парчасынын истәнилән бөлкүсүнүн $\{x_k\}$ олдугуну фәрз едәк. Белә олдугда

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{\xi_k \in [a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{\xi_k \in [c, b]} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Бу барабәрликдә $\lambda \rightarrow 0$ олматра лимитә кечсәк,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

олар.

2) $c < a < b$ олсун. Иккинчи хәссәј әсәсән $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ -дә интегралланан олдугуну көстәрмәк олар. Догрудан да, шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[c, b]$ парчасында интегралланал, $[a, b] \subset [c, b]$ вә $c < a < b$ олдугуну нәзәрә алсаг,

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

олар. $\int_c^a f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx$ олдугуну нәзәрә алсаг,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3) $a < b < c$ олзрса. бу һалда $f(x)$ функцијасы иккинчи хәссәјә әсәсән интегралланандыр. Егигәтән, шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, c]$ -дә интегралланандыр. $[a, b] \subset [a, c]$ вә $a < b < c$ олдугундан

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Дикәр тәрәфдән, $\int_b^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$ олдугуну нәзәрә алсаг,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ алынар.}$$

Гејд 1. Алырынчы хассэ пөтэлэрин сагы сонгу олдуғу халда да доғрудур. Јэни $f(x)$ функцијасы $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_n, b]$ парчасында да интегралланандыр вэ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

барабарлији доғрудур. ►

Хассэ 3 $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланан вэ κ истәнилән сабит эдәд оларса, $\kappa f(x)$ функцијасы да һәммин парчада интегралланандыр вэ

$$\int_a^b \kappa f(x) dx = \kappa \int_a^b f(x) dx$$

доғрудур. Башга сөзлә, сабити интеграл җарси алтындан кәнара чыхармағ олар

► $[a, b]$ парчасынын истәнилән $\{x_k\}$ сөлкүсүнә вэ ихтијари $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөггәсинә уғун интеграл чәмини

$$\sum_{k=1}^n \kappa f(\xi_k) \Delta x_k = \kappa \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (1)$$

шәклиндә јазмағ олар.

(1) барабарлијиндә $\lambda \rightarrow 0$ олдуғда лимитә кечсәк,

$$\int_a^b \kappa f(x) dx = \kappa \int_a^b f(x) dx$$

олар. ►

Мисал 1. $J = \int_0^2 |1 - x| dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $[0, 2]$ парчасыны $[0, 1]$ вэ $[1, 2]$ кими һиссәләрә бөләк.

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсағ,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 |1 - x| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\ &= \frac{(1-x)^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Мисал 2. $J = \int_a^b f(x) dx$ ($a < b$), $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ интегралыны һесабламалы.

■ Бурада үч һада баһаг.

а) $0 \leq a < b$ оларса, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$;

б) $a < b < 0$ оларса, $f(x) = -1$ вә $\int_a^b f(x) dx = -b - (-a) = a - b$

с) $a < 0 < b$ олдуғда исә $\int_a^b f(x) dx$ интегралыны ики интеграла аҗырмаг лазымдыр.

Бүтүн бу һаллары бирләшдирсәк, $\int_a^b \frac{1}{x} dx = |b| - |a|$. ■

Мисал 3. $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$ интегралыны һесаблимамы.

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \\ &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Хәссә 4. $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функцијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $f_1(x) \pm f_2(x)$ ч.ми дә һәммин парчада интегралланандыр вә

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

◀ $[a, b]$ парчасыны истәнилән гәјда илә

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

кичик парчалара бөлүб угуун оларак һәр бир парчада $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) нөггәси сечиб интеграл чәми дүзәлт-сәк,

$$\sum_{k=1}^n [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)] (x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \pm \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \quad (2)$$

догру олар. Шәртә көрә $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функциялары $[a, b]$ парчасында интегралланандыр. Демәли, сағ тәрәфдәки чәм-ләрин лимити вар. Бу ону көстәрир ки, сол тәрәфин дә ли-мити вар вә

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f_1(x) dx \quad (3)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f_2(x) dx \quad (4)$$

олдугундан

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)] \Delta x_k = \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx \quad (5)$$

олар. (2), (3), (4) вә (5)-дән

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

алынар.

Нәтичә 1. $f_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) функциялары $[a, b]$ -дә интегралланандырса, бу функциялар хәтти комбинациясы да интегралланандыр вә

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n C_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n C_i \int_a^b f_i(x) dx.$$

Нәтичә 2. $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функциялары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $f_1(x) \cdot f_2(x)$ һасили дә һәмин парчада интегралланандыр.

Доғрудан да, $4f_1(x)f_2(x) = [f_1(x) + f_2(x)]^2 - [f_1(x) - f_2(x)]^2$ еңиләндә $f_1(x) + f_2(x)$ интегралланан олдуғун.

дан бунларын квадратлары* да интегралланандыр.

Демәли, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ һасили интегралланан олар.

Теорем 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланан вә $f(x) \neq 0$ оларса, бу функцијанын һәммин парчада интегралы мәнфи ола билмәз.

► $\{x_k\}$ бөлкүсү $[a, b]$ парчасынын истәнилән бөлкүсү вә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, n$) ихтијари нөгтәдирсә, онда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0$$

олар. Көстәрәк ки, бу һал үчүн интеграл чаминин лимити мәнфи дејил Әксини фәрз едәк. Тутар ки, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = A$ мәнфи-

дир. в — A олмагла $\{x_k\}$ бөлкүсүнү еләсеч к ки, $\sigma = A_1 < A$ олсун. Бу ахырынчы бәрабәрсизлик анчаг $\sigma < 0$ олан һал үчүн мүмкүндүр. Бу исә ола билмәз, чүнки $\sigma \geq 0$. Алынан зидди-
[әт теоремин доғру олдугуну көстәрир.]

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0. \quad \blacktriangleright$$

Нәтичә 3. $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса вә $\forall x \in [a, b]$ үчүн $f(x) \leq \varphi(x)$ оларса,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Шәртә көрә $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцијалары $[a, b]$ парчасында интегралланан олмагла $\varphi(x) - f(x) \geq 0$. Әввалки теоремә әсасән

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx \geq 0 \text{ вә } \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Ахырынчыдан,
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

* $\varphi(u(x)) = u^2(x)$ вә $u(x) = t^2$ илә ишарә етсәк, $\varphi(t) = t^2$ олар. Шәртә көрә $u(x)$ функцијасы Гимана көрә интегралланандыр, онда $m \leq u(x) \leq M$ вә $\int_a^b u(x) dx \leq C$, C_1 таг m, M . Дикәр тәрәфдән, $[m, M]$ парчасында Липшиц шәртини өдәдији үчүн:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |t_1^2 - t_2^2| = |t_1 + t_2| |t_1 - t_2| \leq (|t_1| + |t_2|) |t_1 - t_2| \leq 2C_1 |t_1 - t_2|$$

олар. $2C_1 = C$ ишарә етсәк, $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C |t_1 - t_2|$ олар. Теорем

4-ә әсасән (1 фәсия, § 2) $\varphi(t) = \varphi(u(x)) = u^2(x)$ функцијасы Гимана көрә интегралланан олар.

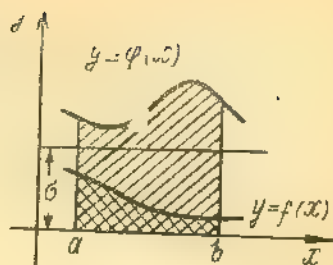
Үчүнчү нәтиженин пәндәси мә'насы ашағыдакы кимидир. Сәдәлик үчүн $y=f(x) \geq 0$ вә $y=-\varphi(x) \geq 0$ олдугуну фәрз едәк (шәкил 12).

Шәкилдән көрүндүжү кими

$$S_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad S_2 = \int_a^b \varphi(x) dx$$

вә $S_2 > S_1$ олдугундан

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$



Шәкил 12

Теорем 2. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә интегралланандырса, интегралын мүтләг гижмәти интегралалты функцијанын мүтләг гижмәтинин интегралындан бөжүк дејил.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

◀ $\forall x \in [a, b]$ үчүн, $|f(x)| \leq f(x)$ вә $|f(x)| \leq -f(x)$ тоғр удур. Бу бәрабәрсизлиги интегралласағ

$$\int_a^b (-|f(x)|) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

вә $|a|$

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Бурадан

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \blacktriangleright$$

Гејд 2. $b < a$ оларса, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$ олар. Нәгигәтән,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq \int_b^a |f(x)| dx \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

Теорем 3. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә кәсилмәз вә һәмин парчада мәнфи дејилсә, һеч олмаса бир $x_0 \in [a, b]$ нөгтәсиндә $f(x_0) > 0$ оларса, онда

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

◀ $x_0 \in [a, b]$ олсун. Шэртэ көрө $f(x)$ функцијасы x_0 нөг-тэсиндэ кэсилмэз вэ $f(x_0) > 0$ олдуғундан x_0 -ын елэ $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ этрафы вардыр ки, $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ үчүн

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = \eta > 0$$

олар. Дикэр тэрафдэн,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \quad (6)$$

олдуғундан вэ

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x) dx \geq 0; \quad \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \geq 0; \quad \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \eta dx = 2\delta\eta. \quad (7)$$

(7) ифадэлэрини (6)-дэ нызэрэ алсаг, $\int_a^b f(x) dx > 0$ олмасы ашкардыр. ▶

Гејд 3. $x_0 \in [a, b]$ вэ $x_0 \in [a, b]$ оларса, су хал үчүн $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ парчасы эвэзинэ ујуғ олараг $[a, a + \delta]$, $[b - \delta, b]$ парчаларына бахмат ла-зымдыр.

§ 8. ОРТА ГИЈМЭТ ТЕОРЕМЛЭРИ

Теорем 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса вэ

$$m \leq f(x) \leq M \quad (1)$$

оларса, онда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

олар. (бурада m, M сабитлэрдир).

◀ (1) бэрэбэрсизләјни интегралласаг

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

вэ ја

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad \blacktriangleright$$

Теорем 2. (Үмүмилэшмиш орта гијмэт теорем-и). $f(x), \varphi(x)$ функцијалары $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, $\varphi(x)$ һэмин парчада ишарэсини дэ-јишмэзсэ, ја'ни $\varphi(x) \geq 0$ ($\varphi(x) \leq 0$) вэ $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = m$,

$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$ оларса, елэ $\mu \in [m, M]$ эдэди вар ки,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (2)$$

Мүэ]жэн олмаг үчүн $a < b$ вэ $[a, b]$ парчасында $\varphi(x) \geq 0$ олсун. Дэгиг сэрхэллэрин тэ'рифинэ көрө

$$m \leq f(x) \leq M \quad (3)$$

олар. $f(x)$ вэ $\varphi(x)$ шэртэ көрө $[a, b]$ парчасында интеграл-ланан олдуғундан (3) барабэрсизлијинин һэр тэрэфини $\varphi(x)$ -э вуруб a -дан b -јэ кими интегралласаг

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx \quad (4)$$

вэ $\varphi(x) \geq 0$ олдуғундан $\int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$ олар.

1) $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$ оларса, $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0$ вэ бу һалда теорем исбат слунар. Бурада μ -нүн јеринэ $[m, M]$ -дэн истэнилэн эдэди көтүрмэк олар.

2) $\int_a^b \varphi(x) dx > 0$ олсугда (4) барабэрсизлијинин һэр тэрэ-фини $\int_a^b \varphi(x) dx$ -э бөлсэк,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M.$$

Бурада $\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx}$ μ эдэди илэ ишара етсэк

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx$$

алынар. ►

Гејд 1. Икинчи теорем $\varphi(x) \geq 0$ олан ҳал учун исбат едилмишидир $\varphi(x) < 0$ оларса, теорем аналожи оларга исбат едилди. Белә ки, исбат заманы барабарсизликләрин ишарәси әксинә оларга дәјишиди.

Гејд 2. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында қасымәз оларса, (2) дүстүру ашағыдағы кими

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx - f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx$$

ифадә олунар. Бурада $\xi \in [a, b]$.

Догрудан да, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында қасымәз олдуғундан һәмин парчада Вејерштрассын икинчи теореминә әсасән өзүнүн ән бөјүк M вә ән кичик m гүмәтләрини алыр. Кошинин икинчи теореминә әсасән исе $f(x)$ функцијасы m вә M арасында истәнилән аралыг гүмәт алар, јәни елә $x = \xi \in [a, b]$ вар ки,

$$\frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} = f(\xi)$$

вә бурадан $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx$ олар.

Нәтичә. $f(x)$ қасымәз вә $\varphi(x) = 1$ оларса, елә $\xi \in [a, b]$ вар ки,

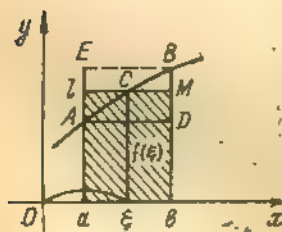
$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi) \quad (5)$$

олур.

(5) дүстүру сөзлә белә охунур: мүјјәт интеграл, интеграллама парчасынын узунлуғу илә интеграл алтындағы функцијанын $x = \xi \in [a, b]$ нөггәсиндәки гүмәти һасилинә барабардир.

Нәтичәнин һәндәси мә'насы $y = f(x)$ әјрисини, $x = a$, $x = b$ ординатлары вә Ox охунун парчасы илә әһәтә олунмуш саһәјә баһағ (шәкил 13).

Шәкилдән көрүндүјү кими $aABb$ әјрихәтли трапесинин саһәси, һәмин трапесин дахилинә чәкилмиш $aADb$ дүзбучаглысынын саһәсиндән бөјүк вә трапесин харичинә чәкилмиш $aEBb$ дүзбучаглысынын саһәсиндән кичикдир. Демәли, әјрихәтли трапесин саһәси бу ики дүзбучаглынын арасында һәр һансы бир aMb дүзбучаглысынын саһәсинә барабар олмалыдыр. Бу дүзбучаглы, оғурачағы $b - a$ вә һүндүрлүјү $f(\xi)$ олан дүзбучаглыдыр.



Шәкил 13

Мисал 1. Бир периодда, я'ни t 0-дан $t = T$ мүддәтин-
дә электрик һәрәкәт гүввәсини E_m орта гиҗәтини
тә'йин едия.

■ Физикадан мә'лум олдуғу кими электрик һәрәкәт
гүввәси

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

дүстүрү илә тә'йин едилир.

Бурада E_0 сабит, T чәрәјан периоду (сабит), t - дәјишән
замандыр. $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында орта гиҗ-
мәти

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

дүстүрү илә һесабыланыр. Онда

$$E_m = \frac{E_0}{T} \int_0^T \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{E_0}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \left[-\cos \frac{2\pi t}{T} \right]_0^T =$$

$$\frac{E_0}{2\pi} \left(-\cos \frac{2\pi T}{T} + \cos 0 \right) = -\frac{E_0}{2\pi} (1 - 1) = 0$$

олар.

Демәли, электрик һәрәкәт гүввәсинин бир периоддакы
орта гиҗмәти сыфра барабардир. ■

Мисал 2. 0-дан $\frac{\pi}{\omega}$ мүддәтиндә дәјишән чәрәјан шиддә-
тинин гиҗмәтини һесабыламалы.

■ Электрик бәһсиндән мә'лумдур ки, дәјишән чәрәјан
шиддәти $J = J_0 \sin \omega t$ дүстүрү илә тә'йин едилир. Бурада J_0
максимум чәрәјан шиддәтидир вә $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Функцијанын орта
гиҗмәт дүстүрүнү тәтбиг етсәк,

$$J_m = \frac{1}{\frac{\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} J_0 \sin \omega t dt = \frac{\omega J_0}{\pi \omega} [\cos \omega t]_0^{\frac{\pi}{\omega}} =$$

$$= \frac{J_0}{\pi} \left(\cos \frac{\omega \pi}{\omega} - \cos 0 \right) = \frac{2}{\pi} J_0.$$

в) я

$$J_m = \frac{2}{\pi} J_0 \approx 0.63 J_0. \blacksquare$$

Гејд. Гејш һалларда (мәсәлән, электротехникада) функцијанын квәд
ратынын орта гиҗмәтини таймаг тәләб олунур.

$$\text{Jэ'ни } \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Бу орта гijмeтин квадрат кeкyнe нeмин парчада орта квадратик гijмeт деjилip.

Орта квадратик кeркинлик V_t ашагыдакы

$$V_t^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt$$

дyстypу илe тe'ийн едилip.

Дe'ишeн чeрe'ийн шиддeти орта квадратик

$$J_t^2 = \frac{1}{T} \int_0^T J^2 dt$$

дyстypу вacитeсилe ифaдe едилip.

Бурада V_t кeркинлик вe J_t —чeрe'ийн шиддeтидip.

Теорем 3. (Бонне* теореми) $\varphi(x)$ фyнкcиjасы $[a, b]$ парчасында монотон, $f(x)$ иce нeмин парчада интегралланандырса елe $\xi \in [a, b]$ нeгтeси вap ки,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

дyстypу дoгpудyp.

Бу теореми исбат етмeк yчyн ввeлчe Абел леммасыны исбат едeк.

Лемма. Тутaг ки, $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ вe $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ики сонлу eдeди ардычыллыгдыр вe $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq 0$.

Экeр $\sigma_p = v_0 + v_1 + \dots + v_p$ ($p = 0, n$) иce, онда

$$u_0 (\min \sigma_p) \leq u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \leq u_n (\max \sigma_p).$$

► $S = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ ишарe етceк вe $v_0 = 1$, $v_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$ ($i = 1, n$) олдугуну нeзeрe алcaг.

$$S = u_0 \sigma_0 + u_1 (\sigma_1 - \sigma_0) + u_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \dots + u_n (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \\ = \sigma_0 (u_0 - u_1) + \sigma_1 (u_1 - u_2) + \dots + \sigma_{n-1} (u_{n-1} - u_n) + \sigma_n u_n$$

олар.

Ахырынчы бeрaбeрликдe, $u_0 - u_1 \geq 0$, $u_1 - u_2 \geq 0, \dots$, $u_{n-1} - u_n \geq 0$, $u_n \geq 0$ олдугуну нeзeрe алcаг,

$$(\min_p \sigma_p) [(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_{n-1} - u_n) + u_n] \leq S \leq \\ \leq (\max_p \sigma_p) [(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_{n-1} - u_n) + u_n]$$

вe jа

* Оссиан Бонне (1819—1892) франсыз рижизитчысыдыр.

$$(\min_p \sigma_p) u_0 \leq S \leq (\max_p \sigma_p) u_0.$$

Инди исә Бонне теоремини исбат едәк.

$\varphi(x)$ вә $f(x)$ функциялары $[a, b]$ -дә интегралланан олду-
гундан $f(x) \cdot \varphi(x)$ дә һәмийн парчада интегралланандыр. Әв-
вәлчә фәрз едәк ки, $\varphi(x) \geq 0$ вә $[a, b]$ -дә монотон артмајан-
дыр. $[a, b]$ парчасыны n барабар һиссәјә бөләк:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad \lambda = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Абел леммасында

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \varphi(x_i)$$

көтүрсәк вә $\varphi(a) = u_0$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\varphi(a) \sum_{i=0}^q f(x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \varphi(x_i) \leq \varphi(a) \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Бу барабәрсизлијин һәр ики тәрәфини $\lambda > 0$ әдәдинә вурсаг,

$$\varphi(a) \lambda \sum_{i=0}^q f(x_i) \leq \lambda \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \varphi(x_i) \leq \varphi(a) \lambda \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (6)$$

Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ истәнилән мүсбәт әдәддир. Онда интегралын
тәрифинә әсасән елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, $\lambda < \delta$ олдуғда
истәнилән p үчүн ($p = 0, n$)

$$\left| \lambda \sum_{i=0}^p f(x_i) - \int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Бурадан,

$$\int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x) dx - \varepsilon < \lambda \sum_{i=0}^p f(x_i) < \int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x) dx + \varepsilon.$$

Ләкин

$$\min_i \int_a^t f(x) dx < \int_a^{a+(p+1)\lambda} f(x) dx \leq \max_i \int_a^t f(x) dx$$

олдуғуну нәзәрә алсаг истәнилән p үчүн $\lambda < \delta$ олдуғда

$$\min_i \int_a^t f(x) dx - \varepsilon \leq \lambda \sum_{i=0}^p f(x_i) \leq \max_i \int_a^t f(x) dx + \varepsilon$$

аларыг. Бу барабәрсизлији (6)-да $p = q$ вә $p = n$ олан һалда
јазсаг, $\lambda < \delta$ олдуғда

$$\varphi(a) \left(\min_t \int_0^t f(x) dx - \varepsilon \right) \leq \lambda \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \varphi(x_i) < \\ \leq \varphi(a) \left(\max_t \int_0^t f(x) dx + \varepsilon \right)$$

олар. $\lambda \rightarrow 0$ жахынлашдыгда лимитэ кечсэк

$$\varphi(a) \left(\min_t \int_a^t f(x) dx - \varepsilon \right) < \int_a^b f(x) \varphi(x) dx < \\ \leq \varphi(a) \left(\max_t \int_a^t f(x) dx + \varepsilon \right).$$

$\varepsilon > 0$ ихтијари олдуғундан

$$\varphi(a) \min_t \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx < \varphi(a) \max_t \int_a^t f(x) dx, \quad (7)$$

дикер тэрэфдэн

$$F(t) = \varphi(a) \int_a^t f(x) dx$$

кәсилмәздир. Догрудан да

$$\Delta F = F(t+h) - F(t) = \varphi(a) \int_t^{t+h} f(x) dx = \\ = \varphi(a) h \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \varphi(a) Mh$$

бәрабәрлијиндә $h \rightarrow 0$ олдуғда $\Delta F \rightarrow 0$. Демәли, $F(t)$ $[a, b]$ -дә кәсилмәздир. (7) бәрабәрсиглаји кәстәрир ки,

$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx$ әләди бу функсия үчүн аралыг гијмәтдир.

онда Кошиниң аралыг гијмәт һагғындакы теореминә әсасән әлә $\xi \in [a, b]$ вар ки,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (8)$$

Инди фәрз едәк ки, $\varphi(x)$ монотон азалмајандыр. Онда $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(b)$ функцијасы монотон азалмајан вә $\psi(x) > 0$ олар. (8) дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = \psi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) [\varphi(x) - \varphi(b)] dx - [\varphi(a) - \varphi(b)] \int_a^b f(x) dx.$$

Бурадан

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \varphi(a) \int_a^b f(x) dx + \varphi(b) \int_a^b f(x) dx - \\ &- \varphi(b) \int_a^b f(x) dx = \varphi(a) \int_a^b f(x) dx + \varphi(b) \left(\int_a^b f(x) dx - \right. \\ &\left. - \int_a^b f(x) dx \right) = \varphi(a) \int_a^b f(x) dx + \varphi(b) \int_a^b f(x) dx. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Аралыг җијмәт теоремини тәтбиғ етмәклә интегралы җијмәтләндрмәјә аид масаллар нәзәрдән кечирәк.

Мисал 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Бу функција $[0, 1]$ -дә кәсилмәздир ($f'(x) = x^x(1 + \ln x)$). Стационар нөгтәни тапмағ үчүн $1 + \ln x = 0$; $x = \frac{1}{e}$ нөгтәсиндә функцијанын минимуму вар вә

$$f_{\min} \left(\frac{1}{e} \right) = e^{-\frac{1}{e}}.$$

Бу җијмәт $[0, 1]$ парчасында функцијанын ән кичик җијмәтләндр. Беләликлә, $e^{-\frac{1}{e}} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1$ вә $e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,692$ олар.

Гейд едәк ки, бу һал үчүн интегралын җијмәтләндр элементар функцијаларын җијмәтләндр вәсәтәсилә ифадә олунмур $f(x)$ функцијасы $[0, 1]$ парчасында кәсилән олдуғда орта җијмәт теоремини доғру олмаја да биләр.

§ 9. МҮҮҖЛӘН ИНТЕГРАЛ ЛУХАРЫ СӘРҲӘДИН ФУНКЦИЈАСЫ КИМИ

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

интегралында x дәјишәнини t илә әвәз етсәк,

$$J = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

олар.

Теорем 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интегралланандырса, онда $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ функцијасы $\forall x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәздир.

◀ $\forall x \in [a, b]$ нөгтәси кәтүрүб она h артымы верәк онда

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

нә ја

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq M|h|,$$

$$\forall t \in [a, b], |f(t)| \leq M,$$

$$|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|.$$

ахырынчы бәрабәрсизликдә $h \rightarrow 0$ олмәгла лимитә кәчсәк $\lim_{h \rightarrow 0} [F(x+h) - F(x)] = 0$.

Демәли, $F(x)$ функцијасы $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәздир. ▶

Теорем 2. $[a, b]$ парчасында интегралланан $f(x)$ функцијасы $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәздирсә һәмик нөгтәдә $F(x)$ функцијасынын төрәмәси вар вә

$$F'(x) = f(x).$$

◀ Шәртә кәрә $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә $f(x)$ функцијасы кәсилмәздир, онда

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \{f(x) + [f(t) - f(x)]\} dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = \frac{1}{h} f(x) h + \\ &+ \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \quad (1) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = 0$$

олдугуну исбат едәк.

$f(t)$ функцијасы x нөггәсиндә кәсилмәз олдугундан истә-
нилән $\epsilon > 0$ үчүн елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, $h < \delta$ олдугда
 $\forall t \in [x, x+h], |f(t) - f(x)| < \epsilon$ олар. $h < \delta$ олдугу үчүн

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| &< \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \epsilon dt \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \epsilon h \right| = \epsilon \end{aligned}$$

алынар.

(1) бәрабәрлијиндә $h \rightarrow 0$ јахынлашдырыб лимитә кечсәк,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \blacktriangleright$$

Гејд 1. Хүсуси һалда $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз-
дирсә, онда $F(x)$ функцијасынын һәмин парчада тәрәмәси вар вә $\forall x \in [a, b]$
үчүн $F'(x) = f(x)$.

Беләликлә, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз оларса, о һал-
да һәмин парчада онун нөтидәи функцијасы вар.

Нәтичә. $[a, b]$ парчасында кәсилмәз $f(x)$ функцијасынын
гејри-мүәјјән интегралы $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt + C$ олар. (бу-
рада C —ихтијари сабитдир).

Мисал.

$$y = \varphi(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

бу функција $x = 0$ нөггәсиндән башга $[-1, 1]$ парчасынын бү-
түн нөггәләриндә кәсилмәздир.

$[-1, 1]$ парчасыны $[-1, 0]$ вә $[0, 1]$ парчаларына бөлсәк,
бу парчаларын һәр бириндә $\varphi(x)$ интегралланандыр. $\varphi(x)$
функцијасы $[-1; 1]$ парчасында интегралланан олдугуна көрә

$$F(x) = \int_{-1}^x \operatorname{sign} t dt = -1 + |x| \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

доғрудур. Һәсигәтән $[-1, 0]$ јарыминтервалында $\varphi(x)$ кәсил-
мәз олмагла, $\varphi(x) = -1$ -дир. Һәмин јарыминтервалда онун

ибтидан функцијасынын x олдуғуну не, э, э алыб Нјутоң-
Лејбнис дүстуруну тэтбиг едэк:

$$\int_{-1}^x \text{sign } t dt = \int_{-1}^x (-1) dt = -t \Big|_{-1}^x = 1 - x, \quad (-1 \leq x < 0). \quad (3)$$

Биринчи теоремэ көрө $F(x)$ функцијасы хүсуси һалда $x=0$
нөгтәсиндә кәсилмәздир. Демәли,

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1 - x) = -1. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x > 0 \text{ үчүн } F(x) &= \int_{-1}^x \text{sign } t dt = \int_{-1}^0 \text{sign } t dt + \int_0^x 1 dt = \\ &= -1 + t \Big|_0^x = -1 + x. \end{aligned} \quad (5)$$

(3), (4) вә (5)-дән (2)-нин доғру олмасы чыхыр.

Гејд 2.

$$\int_0^x \text{sign } t dt = |x|. \quad (6)$$

(6) интегралын алтындакы функција $x=0$ нөгтәсиндә кәсилән мәһ-
дуд функција олдуғуна баһмајарат, онун ибтидан функцијасы $F(x) = x$
кәсилмәздир. Лакиа $F'(0)$ јохдур.

§ 10. МҮӨЛҖӘН ИНТЕГРАЛДА ДӘЛИШӘНИН ӘВӘЗ ЕДИЛМӘСИ

Теорем. $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында кә-
силмәз, $x = \varphi(t)$ функцијасынын $[m, M]^*$ парчасында $\varphi'(t)$
кәсилмәз төрәмәси варса ($\min_{t \in [m, M]} \varphi(t) = a$, $\max_{t \in [m, M]} \varphi(t) = b$),

белә ки $\varphi(m) = a$, $\varphi(M) = b$, онда

$$\int_a^b f(x) dt = \int_m^M f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (1)$$

бәрабәрлији доғрудур.

◀ $f(x)$ функцијасы кәсилмәз олдуғундан онун $F(x)$ бә-
тидан функцијасы вар. $F(x)$ вә $x = \varphi(t)$ функцијалары үлүг
олараг $[a, b]$ вә $[m, M]$ парчаларында дифференциаллана-
дыр.

Мүрәккәб функцијадан төрәмә алма гајдасына көрә

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t)] = F'[\varphi(t)] \varphi'(t) \quad (2)$$

* $\varphi(x)$ функцијасынын $[m, M]^*$ парчасынын истәнилән даһили нөгтәсин-
дә кәсилмәз $\varphi'(t)$ төрәмәси варса вә $\lim_{t \rightarrow m+0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow m-0} \varphi(t)$ варса вә сонду-
дурса, о һалта $\varphi(t)$ функцијасынын $[m, M]$ парчасында кәсилмәз төрәмәси вар
дејирләр.

олар. Барабарлијин саг тәрәфиндә $F'[\varphi(t)] = f(x)$ олдуğunu нәзәрә алсаг, (2) барабарлија

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t)] = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$$

кими олар. $F[\varphi(t)]$ функцијасы $m \leq t \leq M$ парчасында $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ функцијасынын ибтидаи функцијасы олдуғундан

$$\int_m^M f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(M)] - F[\varphi(m)] = F(b) - F(a) \quad (3)$$

олур. (Шәртә көрә $\varphi(m) = a$, $\varphi(M) = b$.)

Дикәр тәрәфдән $F(x)$, $[a, b]$ парчасында $f(x)$ -ин ибтидан функцијасы олдуғундан

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

олар. (3) вә (4) барабарликләрини мүгајисә етсәк

$$\int_a^b f(x) dx = \int_m^M f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

(1) барабарлијинә мүәјјән интегралда дәјишәни әвәзәтмә дүс-туру дејилир. ►

Дәјишәнин әвәз едилмәсинә анд бир сыра мисаллара ба-хаг.

Мисал 1 $J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ интегралыны һесабламагы.

■ $x = a \sin t$ әвәзләмәси апарсаг, $x = 0$ олдугда $t = 0$ вә $x = a$ олдугда $t = \frac{\pi}{2}$ олар. Онда

$$J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$ интегралыны һесабла-малы.

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \int_{-1}^1 \frac{d(x - \cos \alpha)}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha};$$

$x - \cos \alpha = t$ эвэз етсэк, $dx = dt$ вэ $x = -1$ олдугда $t = -1 - \cos \alpha$ вэ $x = 1$ оларса, $t = 1 - \cos \alpha$ олар.

$$J = \int_{-1 - \cos \alpha}^{1 - \cos \alpha} \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \operatorname{arctg} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. $J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$ интегралыны хесабламалы.

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx. \quad (5)$$

Ахырынчы интегралда $J_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$, $x = \pi - t$ эвэз-

лэмэсини апарсаг, $dx = -dt$, бурада $x = \frac{\pi}{2}$ олдугда $t = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ вэ $x = \pi$ оларса, $t = \pi - \pi = 0$ олар.

$$J_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt. \quad (6)$$

(5) вэ (6) бэрэбэрликлариндэн,

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \pi \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Мисал 4 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, ($ab \neq 0$) интегралыны
 ҳесабламалы.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} + \\
 &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right)}{1 + \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right)^2} + \right. \\
 &+ \left. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} x\right)}{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} x\right)^2} \right] = \frac{1}{ab} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \right. \\
 &+ \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} x\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{ab} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right] = \\
 &= \frac{\pi}{2ab} \operatorname{sign}(ab) = \frac{\pi}{2|ab|}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Бурада $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$ ($y \neq 0$) дустурундан
 истифадә едилмишдир.

Мисал 5. $J = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{1 + 2a \cos x + a^2}$ интегралыны ҳесаблама-
 лы.

■ $a \neq 1$ олдугда

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^2 x}{1 + 2a \cos x + a^2} &= \frac{1}{1 + 2a \cos x + a^2} - \frac{\cos^2 x}{1 + 2a \cos x + a^2} = \\
 &= \frac{1}{1 + 2a \cos x + a^2} - \frac{\cos x}{2a} + \frac{1 + a^2}{4a^2} - \frac{(1 + a^2)^2}{4a^2 (1 + 2a \cos x + a^2)} = \\
 &= \frac{1 + a^2}{4a^2} - \frac{(1 + a^2)^2}{4a^2 (1 + 2a \cos x + a^2)} - \frac{\cos x}{2x}, \\
 J &= \frac{1}{4a^2} [(1 + a^2)\pi - (1 + a^2)^2 J_1].
 \end{aligned}$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2a \cos x + a^2} = \frac{2}{1-a^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{1-a}{1+a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1-a}{1+a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2} + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)^2} \right] = \frac{2}{1-a^2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1-a}{1+a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] = \frac{2}{1-a^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1-a}{1+a} + \operatorname{arctg} \frac{1+a}{1-a} \right) = \\ = \begin{cases} \frac{\pi}{1-a^2}, & |a| < 1 \\ -\frac{\pi}{1-a^2}, & |a| > 1. \end{cases}$$

Демэли,

$$J = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |a| < 1, \\ -\frac{\pi}{2a^2}, & |a| > 1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Мисал 6. $J = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx dx}{\sin x}$, k -там эдэд оларса, $J=0$ олдуғуну көстөрүн.

■ $\pi - t = x$ эвэз етсэк, $dx = -dt$ олар.

$$J = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx dx}{\sin x} = - \int_{\pi}^0 \frac{\sin 2k(\pi - t) dt}{\sin(\pi - t)} = \\ = - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kt dt}{\sin t} = - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx$$

$$J = -J \text{ вэ } 2J = 0, J = 0. \quad \blacksquare$$

Мисал 7. $\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\pi} f(a-x) dx$

олдуғуну исбат един.

■ $x = a - t$ эвэзлэмэси апарсаг, $dx = -dt$ олар.

$$\int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(a-t) dt = \int_0^a f(a-t) dt.$$

x	t
0	a
a	0

Мүөллөн интеграл деңишенин ишарэ едилмэсиндэн асылы олмадыгындан ахырынчы интегралда t эвэзинэ x јазсаг,

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx. \blacksquare$$

§ 11. МҮӨЛЛӨН ИНТЕГРАЛДА ЫИССӘ-ЫИССӘ ИНТЕГРАЛЛАМА

Теорем. $u = f(x)$ вә $v = \varphi(x)$ функцијаларынын $[a, b]$ парчасында кәсилмәз төрәмәләри варса,

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x) f'(x) dx \quad (1)$$

дүстуру доғрудур.

$$\left\langle \frac{d}{dx} [f(x) \varphi(x)] = f(x) \varphi'(x) + f'(x) \varphi(x) \right.$$

олдуғундан, $f(x) \cdot \varphi(x)$ функцијасы

$$f(x) \varphi'(x) + \varphi(x) \cdot f'(x)$$

функцијасынын ибтидаи-функцијасы олар. Онда

$$\int_a^b [f(x) \varphi'(x) + f'(x) \varphi(x)] dx = f(x) \varphi(x) \Big|_a^b$$

вә ја

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x) f'(x) dx$$

олар. (1) дүстуруну

$$\int_a^b f d\varphi = f\varphi \Big|_a^b - \int_a^b \varphi df$$

вә ја

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

шәклиндә јазмаг даһа мәгсәдәујундур. Ыиссә-ыиссә интегралламаја аид бир нечә мисал көстәрәк.

Мисал 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx$ интегралыны һесабламалы.

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin bx \\ dv = e^{ax} dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = b \cos bx dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right|$$

u вэ v функцияларынын өзлери вэ төрөмэлери $\left[0; \frac{\pi}{b}\right]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан

$$J = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \left|_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx = -\frac{b}{a} J_1\right.$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx dx$$

үчүн јенидән һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк. Онда

$$\left| \begin{array}{l} u = \cos bx \\ dv = e^{ax} dx \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} du = -b \sin bx dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right|$$

$$J = -\frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \left|_0^{\frac{\pi}{b}} + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx dx \right) =$$

$$= -\frac{b}{a} \left(-\frac{1}{a} e^{\frac{\pi a}{b}} - \frac{1}{a} \right) - \frac{b^2}{a^2} J;$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} J = \frac{b}{a^2} \left(e^{\frac{\pi a}{b}} + 1 \right); \quad J = \frac{b}{a^2 + b^2} \left(e^{\frac{\pi a}{b}} + 1 \right). \blacksquare$$

Хүсуси һалда $a = b = 1$ оларса,

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1).$$

Мисал 2. $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ интегралыны һесаблим алы.

■ Һиссә-һиссә интеграллама методундан истифадә едәк.

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin^{m-1} x \\ dv = \sin x dx \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right|$$

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x dx =$$

$$= -(-\cos x \sin^{m-1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

$(\cos x \sin^{m-1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ ифадәси, $x = \frac{\pi}{2}$ олдуғда $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $x = 0$ олдуғда исә $\sin 0 = 0$ олдуғундан нәтижә сыфыр олар.

Демәли,

$$J_m = (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx$$

вә ја

$$\begin{aligned} J_m &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx - (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx. \end{aligned}$$

Беләликлә,

$$J_m = (m-1) J_{m-2} - (m-1) J_m.$$

Бурадан

$$J_m = \frac{m-1}{m} \cdot J_{m-2} \quad (2)$$

алынар. (2) дүстурунда m эвәзинә $m-2$ јазсаг,

$$J_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} \cdot J_{m-4}. \quad (3)$$

Јенидән (2) дүстурунда m эвәзинә $m-4$ јазсаг

$$J_{m-4} = \frac{m-5}{m-4} \cdot J_{m-6} \quad (4)$$

вә с. (3), (4) ..., ифадәләрини ардычыл олараг јеринә јаз.

магла $m = 2k$ олдуғда, $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ олар. Беләликлә,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

вә $m = 2k + 1$ оларса,

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

олдугундан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\kappa+1} x dx = \frac{2\kappa(2\kappa-2)(2\kappa-4)\dots 6\cdot 4\cdot 2}{(2\kappa+1)(2\kappa-1)\dots 5\cdot 3\cdot 1}. \quad (6)$$

Гейд.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

догрудур.

Нэгигэтэн,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) (-1) dx = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' dx. \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = t \text{ эвээг етсэк вэ } dx = -dt \text{ олдугуну}$$

нээрэ алсаг,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt$$

олар. Белэликлэ,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m=2\kappa \text{ олдугда,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & (m=2\kappa+1) \text{ олдугда.} \end{cases}$$

§ 12. ВАЛЛИС* ДҮСТҮРҮ

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ олдугда

$$\sin^{2\kappa+1} x < \sin^{2\kappa} x < \sin^{2\kappa-1} x \quad (1)$$

олдугуну исбат едэк.

* Чон Валлис (1616—1703) ийкилис ријазийатчысыд ыр.

(1) бэрэбэрсизлијини $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ парчасында интегралласаг

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x dx$$

вэ ја $J_{2k+1} < J_{2k} < J_{2k-1}$ олар. Онда

$$1 < \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} < \frac{J_{2k-1}}{J_{2k+1}}. \quad (2)$$

§ 11-дэки (2) дүстуруну нэээрэ алсаг

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot J_{2k-1}, \quad \frac{J_{2k-1}}{J_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k}$$

олар. (2) бэрэбэрсизлији исэ

$$1 < \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} < \frac{2k+1}{2k}$$

шэклинэ дүшэр. $k \rightarrow \infty$ олдугда лимитэ кечсэк

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} \right) = 1 \quad (3)$$

олар. (§ 11-дэки) (5) вэ (6) дүстурларыны тэтбиг етсэк

$$\frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]^2 (2k+1)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

олар вэ ја

$$\frac{\pi}{2} = \left\{ \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]^2} \cdot \frac{J_{2k}}{(2k+1) J_{2k+1}} \right\}.$$

(3) бэрэбэрлијини нэээрэ алсаг,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \right\}. \quad (4)$$

Бу Валлис дүстуру ады илэ мэшһурдур.

(4) дүстуру π эдэдини сонсуз һасилин лимити шэклиндэ ифадэ едир.

Гејд. π эдэдини тэгриби һесахламаг үчүн бир чох мет одлар олса да Валлис дүстуру тарихи әһәмијәтэ маликдир.

§ 13. ЧҮТ ВЭ ТӘК ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Тә'риф. Функцијанын варлыг областы координат баш-ланғычына көрә симметриkdirсә вә x -ин бүтүн гијмәтләриндә $f(-x) = f(x)$ бэрэбэрлији өдәнилирсә, $f(x)$ -ә чүт

функсија, $f(-x) = -f(x)$ оларса, $f(x)$ -э тэк функсија де-
 жилир. $f(x) = \cos x$; $f(x) = x^2$ чүт, вэ $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^3$
 функсијалары исэ тэк функсијалардыр. Доғруоан да

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) = \cos x = f(x); & f(-x) &= (-x)^2 = x^2 = f(x) \\ f(-x) &= \sin(-x) = -\sin x = -f(x); \\ f(-x) &= (-x)^3 = -x^3 = -f(x). \end{aligned}$$

Теорем. $f(x)$ функсијасы $[-a, a]$ парчасында кэсил-
 мээдирсэ, онда

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} f(x) dx &= \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x), \text{ чүт оларса,} \\ 0, & f(x), \text{ тэк оларса.} \end{cases} \\ \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

олдуғу ашкардыр.

$$J = \int_{-a}^0 f(x) dx \text{ интегралында } x = -t \text{ эвэз етсэк,}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \\ &= \int_0^a f(-x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

x	t
$-a$	a
0	0

(2) вэ (1)-дэн,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx.$$

$f(x)$ чүт оларса, $f(-x) + f(x) = 2f(x)$. $f(x)$ тэк оларса,
 $f(-x) + f(x) = 0$ олдуғу үчүн

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ чүт оларса,} \\ 0, & f(x) \text{ тэк оларса.} \end{cases}$$

Чүт вэ тэк функсијаларын интегралламасына аид мисал
 лар кэстэрэк.

Мисал 1. $\int_{-1}^1 \frac{x^4 \sin x}{x^6 + 2} dx$ интегралыны һесаблаамалы.

■ Интегралалты функсија тэк функсија олдуғу үчүн $J=0$
 олар. ■

Мисал 2. $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + x^2 \sin x) dx$ интегралыны hesab-
ламалы.

$$\blacksquare \quad J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = J_1 + J_2;$$

$$J_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2};$$

$$J_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = 0,$$

$$J = J_1 + J_2 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. $J = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^5 - 10x^3 - 7x^2 + 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx$
интегралыны hesabламалы.

$$\blacksquare \quad J = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2 + 2} dx +$$

$$+ \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^2 - 4) + 1}{x^2 + 2} dx = J_1 + J_2.$$

J_1 -дә интегралалты функция так олдугу үчүн $J_1 = 0$ олар

$$J_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^2 - 4) + 1}{x^2 + 2} dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left[3(x^2 - 2x^2) + \frac{1}{x^2 + 2} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{6}{5} x^5 - 4x^3 + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{16}{5} \sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

Мисал 4. $\int_{-a}^a f(x^2) \cos x \, dx = 2 \int_0^a f(x^2) \cos x \, dx$ олдуғуну

исбат етмәли.

■ Бу барабәрлијин доғру олдуғуну көстөрмөк үчүн интегралалты функцијанын чүт олмасын көстөрмөк кыфәјәтдир.

$$f(-x) = f[(-x)^2] \cos(-x) = f(x^2) \cos x = f(x). \quad \blacksquare$$

Мисал 5. $\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{dx}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}}$ интегралыны һесабламамы.

■ Интегралалты $f(x) = \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{2+x^2}}$ функцијасы чүт функција олдуғундан,

$$J = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}.$$

$x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$ әвәзләмәси апарсаң, $dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt$ олар.

Онда

$$J = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(2+2\operatorname{tg}^2 t)^2 \cos^3 t} =$$

x	t
0	0
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t \sec^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare$$

Теорем. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсил-мәз вә $x = \frac{a+b}{2}$ дүз хәттинә нәзәрән симметрикдирсә, онда

$$\int_a^b f(x) \, dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) \, dx \quad (3)$$

барабәрлији доғрудур.

◀ Әввәлчә,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx \quad (4)$$

барабәрлијинин доғру олдуғуну көстөрөк.

Бунун үчүн $J_1 = \int_a^b f(a+b-x) dx$ интегралында $x = a + b - t$ өзгөртмөсүн апарсаң ($dx = -dt$),

$$J_1 = \int_a^b f(a+b-x) dx = - \int_b^a f(t) dt = \\ = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

x	t
a	b
b	a

(4) барабарлыгынн нандасы ма'насыны да вермак олар. $[a, b]$ парчасында бахылан $f(x)$ функциясанын графика, нэмин парчада $x = \frac{a+b}{2}$ дүз хэттинэ нэзрэн $f(a+b-x)$

функциясы илэ симметриkdir. Нэгигэтэн абсиси x олан A нөгтэси Ox оху үзэриндэ йерлэширсэ, верилэн дүз хэттэ көрэ симметрик A' нөгтэсинин абсиси $x' = a+b-x$ олар. Демэ-ли, $f(a+b-x') = f(a+b-x) = f(x)$. Симметрик фигурларын саһэлэри барабар олдуғундан (4) ифадэси ики симметрик эйрихэтли трапесин саһэлэринин барабар олдуғуну көстөйир

Инди исэ (3) барабарлыгынн доғру олдуғуну көстөрөк.

$$J = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \quad (5)$$

$$J_1 = \int_{\frac{a+b}{2}}^a f(x) dx; \forall x \in [a, b] \text{ үчүн } f(x) = f(a+b-x)$$

олдуғуну нэзэрэ алсаң,

$$J_1 = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x) dx$$

олар. $a+b-x = t$ эвэз етсөк ($dx = -dt$),

$$J_1 = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x) dx = - \int_{\frac{a+b}{2}}^a f(t) dt = \\ = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt.$$

x	t
b	a
$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b}{2}$

(5) вэ (6) бэрабэрликлэриндэн

$$J = \int_a^b f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx$$

алынар. ►

§ 14. ПЕРИОДИК ФУНКСИЈАНЫН ИНТЕГРАЛЛАНЫМАСЫ

Тә'риф. Сабит $T > 0$ эдәди вә $\forall x \in X, x + T \in X$ үчүн $f(x + T) = f(x)$ шәртини өдәјән вә X чохлуғунда тә'јин олунмуш $y = f(x)$ функцијасына периодик функција дејилир.

Бурада T эдәдинә $f(x)$ функцијасынын периоду дејилир. T эдәди $f(x)$ -ин периодудурса, nT эдәди дә n там эдәд олдуғда $f(x)$ функцијасынын периодудур.

Јә'ни $f(x + nT) = f(x)$.

Периодик функцијаја мисал оларар,

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi_0)$$

функцијасыны көстәрмәк олар. Бурада A, ω вә φ_0 -сабитләр-дир.

Чох асанлығла көстәрмәк олар ки, бу функцијанын периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -дир.

Һәгигәтән,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) &= A \sin\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0\right] = \\ &= A \sin[(\omega x + \varphi_0) + 2\pi] = A \sin(\omega x + \varphi_0) = f(x). \end{aligned}$$

Теорем. Периоду T олан кәсилмәз $f(x)$ функцијасы үчүн

$$J = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad (1)$$

бэрабэрлији доғрудур.

$f(x)$ функцијасы периодик олдуғда (1) дүстуру бу функцијанын парчада интегралынын гүјмәтинин интеграллама парчасынын вәзйјәтиндән асылы олмадығыны көстәрир.

$$J(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{x+T} f(t) dt. \quad (2)$$

(2) бэрабэрлијиндәки ахырлычы интегралда $t = s + T$ әвәзләмәси $(dt = ds)$ апарсар вә $f(s + T) = f(s)$ олдуғуну нәзәрә алсар,

t	s
T	0
$x+T$	x

$$\int_T^{x+T} f(t) dt = \int_0^x f(s+T) ds = \int_0^x f(s) ds$$

олар. Ахырынчы барабэрлији (2)-дә нәзәрә алсар,

$$J(x) = \int_0^T f(t) dt + \int_x^0 f(t) dt + \int_0^x f(s) ds = \int_0^T f(t) dt$$

олар.

Периодик функцијаларын интегралланмасына аид мисаллар.

Мисал 1. $J = \int_{\pi}^{5\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ интегралыны ҳесабламалы.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \quad f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi) + \sin^4(x+\pi)} = \\ = -\frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = -f(x)$$

олдуғу үчүн

$$J = \int_{\pi}^{5\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \\ = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x dx}{(1 + \operatorname{tg}^4 x) \cos^2 x}.$$

$\operatorname{tg} x = t$ эвез етсәк $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$,

$$J = \int_0^1 \frac{2t dt}{1+t^4} = \operatorname{arctg} t^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $J = \int_{\pi}^{4\pi} \sin^3 x dx$ интегралыны ҳесабламалы.

$$J = \int_0^{4\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 x dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx = 0. \quad \blacksquare$$

§ 15. ТЕЛЛОР* ДҮСТУРУНУН ГАЛЫГ ХЭДДИНИИ ИНТЕГРАЛ ФОРМАДА ВЕРИЛИШИ

$f(x)$ функциясны a нөгтөснийн истэнийлэн $\varepsilon > 0$ этра-
фында $n+1$ тэртиб кэсильмэз төрөмөснийн олдугууу фэрэ
едэк. Ньютон—Лейбнис дүстуруна эсасэн,

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

вэ ја

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad (1)$$

олар. (1) дүстурунда

$$\left| \begin{array}{l} u = f'(t) \\ dv = dt \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = f''(t) dt \\ v = t - x \end{array} \right|$$

ишарэ едиб, хиссэ-хиссэ интегралласаг,

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t) dt &= \int_a^x u(t) dv(t) = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \\ &+ \int_a^x f''(t)(x-t) dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

(2)-дэ

$$\left| \begin{array}{l} u = f''(t) \\ dv = (x-t) dt \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = f'''(t) dt \\ V = -\frac{1}{2}(x-t)^2 \end{array} \right|$$

ишарэ едиб хиссэ-хиссэ интегралласаг,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \\ &+ \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt \end{aligned}$$

олар. Хиссэ-хиссэ интеграллама просесини давам егдирсэк,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_n(x) \quad (3)$$

олдугууу аларыг. Бурада

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (4)$$

* Тејлор Брук (1685—1731) инкилис ријазийатчысыдыр.

(3)-э Тејлор дүстуру дејилир.

(4) ифадәси Тејлор дүстурунун галыг һәддидир.

(4) дүстурунда t -јә нәзәрән орта гијмәт теоремини тәтбиғ етсәк,

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} (x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi) (x - a); \xi \in [a, x].$$

Бурада $\xi = a + \theta(x - a)$; $0 < \theta < 1$.

$$r_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{n!} (1 - \theta) f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]$$

Коши формада галыг һәддидир.

§ 16. ИНТЕГРАЛДАН МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈА КИМИ ТӨРӘМӘ АЛМАГ

$f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз, $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ функцијалары исә $[c, d]$ -дә тәјин олунмуш вә бунларын гијмәтләр областы $[a, b]$ -јә дахилдирсә, онда

$$J(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt$$

ифадәси x -дән асылы һәр һансы функција олар.

Мисал. $J(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} t dt$ интегралыны һесабламалы.

$$J(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{\sin x}^{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \frac{\cos 2x}{2}$$

олур. Верилмиш (1) интегралына x -ин функцијасы кими бахыб төрәмәсини алмаг мәсәләси илә мәшғул олаг. Әлавә фәрз едәк ки, $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ кәсилмәз төрәмәјә маликдир.

Бу мәсәләни үмуми шәкилдә һәлл етмәдән әввәл ики хүсуси һала бахаг:

$$1) J_1(x) = \int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t) dt,$$

$$2) J_2(x) = \int_{\psi(x)}^{x_0} f(t) dt. \quad (3)$$

$J_1(x)$ функцијасы x -дән асылы мүрәккәб функцијадыр.

$\varphi(x) = u$ ишарә етсәк, $J_1(x)$ функцијасы u -дан асылы функција олар. u исә x -дән асылы олдуғундан $J_1(x)$ -ә мүрәккәб функција кими бахыб төрәмә алсаг,

$$\frac{d}{dx} J_1(x) = \frac{dJ_1(x)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left(\int_{x_0}^u f(t) dt \right) \frac{du}{dx}$$

вэ сонра мүүжэн интегралда [ухары сэрхэддэ көрө төрөмө-
алма теоремини тэтбиг етсэк,

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = f(u) u'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

Аналоги олараг $v = \psi(x)$ ишарэ етсэк,

$$J_2(x) = \int_v^{x_0} f(t) dt = - \int_{x_0}^v f(t) dt;$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J_2(x) &= \frac{dJ_2(x)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = - \frac{d}{dv} \left(\int_{x_0}^v f(t) dt \right) \frac{dv}{dx} = \\ &= -f(v) v'(x) = -f[\psi(x)] \psi'(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Инди исэ үмүмү хала бахаг:

$$J(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = \int_{\psi(x)}^c f(t) dt + \int_c^{\varphi(x)} f(t) dt. \quad (6)$$

(4) вэ (5) бэрэбэрликлэрини нэзэрэ алмагла (6)-дэн x -э
көрө төрөмө алсаг,

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right) = f[\varphi(x)] \varphi'(x) - f[\psi(x)] \psi'(x). \quad (7)$$

Бир нечэ мисалын хэллини верэк.

Мисал 1. $J(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt$ ($x > 0$) функциясынын төрөмө-
сини тапмалы.

■ (7) дүстурунда $f(t) = \ln t$, $\varphi(x) = x^3$, $\psi(x) = x^2$ олду
гуну нэзэрэ алсаг,

$$J'(x) = \ln x^3 \cdot (x^3)' - \ln x^2 \cdot (x^2)' = (9x^2 - 4x) \ln x. \quad \blacksquare$$

Мисал 2. $\int_1^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$ функциясынын төрөмөсини тапмалы.

■ (7) дүстуруну тэтбиг етсэк,

$$J'(x) = \cos x (\sqrt{x})' = \cos \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. $x = \int_1^{\sqrt[3]{z}} \sqrt[3]{z} \ln z dz$.

$$y = \int_{\sqrt{t}}^3 e^z \ln z dz$$

параметрик шәкилдә верилдикдә y'_x -и тапын.

■ $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ олдуғундан x'_t вә y'_t -ни тапаг:

$$x'_t = \left(\int_1^{t^3} \sqrt[3]{z} \ln z dz \right)' \cdot (t^3)'_t = t \ln t^3 \cdot 3t^2 = 9t^3 \ln t,$$

$$y'_t = \left(\int_{\sqrt{t}}^3 z^2 \ln z dz \right)'_{\sqrt{t}} \cdot (Vt)'_t = -t \ln \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{4} \ln t \cdot \sqrt{t}.$$

$$y'_x = -36 \frac{t^3 \ln t}{\sqrt{t} \ln t} = -36t^3 \sqrt{t} \quad (t > 0). \quad \blacksquare$$

Мисал 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$ лимитини ҳесабламалы.

■ $\frac{0}{0}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик олдуғундан Лопитал гајдасыны тәдбиг едәк:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \right)'}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Мисал 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$ лимитини ҳесабламалы.

■ $\frac{\infty}{\infty}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик олдуғундан Лопитал гајдасыны тәдбиг етсәк,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2}}{xe^{x^2}} = 0. \quad \blacksquare$$

Мисал 6. $\int_0^y e^{-t^2} + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0$. Гейри-ашкар функциядан

терәмә алын.

■ $y = y(x)$ гәбул едиб, x -ә көрә терәмә алсаг,

$$\left(\int_0^y e^{-t^2} dt \right)'_y \frac{dy}{dx} + \left(\int_0^{x^2} \sin^2 t dt \right)'_{x^2} (x^2)'_x = 0$$

вә ја

$$e^{-y^2} y' + \sin^2 x^2 \cdot 2x = 0; \quad y' = -2x e^{y^2} \sin^2 x^2. \quad \blacksquare$$

Мисал 7. $J(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ функциясынын экстремумуну вә дөмә нөгтәсини тапын.

■ $J'(x) = (x-1)(x-2)^2$. Терәмәни тапыб сыфра бәрабәр етсәк, $J'(x) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ бөһран нөгтәләри тапылар. Терәмә $x_1 = 1$ нөгтәси әтрафында ишарәсини мәнфидән мүсбәгә дәјишдији үчүн $x_1 = 1$ нөгтәсиндә минимум вар. $x_2 = 2$ әтрафында терәмә ишарәсини дәјишмәдијәндән экстремуму јохдур. Икинчи тәртиб терәмә

$$J''(x) = 3x^2 - 10x + 8.$$

$x_1 = \frac{4}{3}$ вә $x_2 = 2$ нөгтәләриндә сыфра бәрабәр олмагла бу нөгтәләрдән кечдикдә $J''(x)$ функциясы ишарәсини дәјишдијиндән һәммин нөгтәләр дөмә нөгтәләринин абсиси олур. ■

I. Нјутон -Лејбнис дүстурундан истифадә едәрәк ашағыдакы интеграллары һесаблајын.

Ч а л ы ш м а л а р:

Ч а в а б л а р:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

$\frac{\pi}{2}.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$

1.

3. $\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

9.

4. $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x},$ $\ln \frac{1}{5}$
5. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9},$ $\frac{1}{12} \ln \frac{1}{3},$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{x^2 + 1},$ $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4},$
7. $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx,$ $\frac{29}{3}.$
8. $\int_1^2 x \ln x dx,$ $2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$
9. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx,$ $2\pi.$

II. Верилмиш эвэлэмэлэрдэн истифадэ едэрэк ашағыдакы интеграллары һесаблаҗын.

Чалышмалар:

Чаваблар:

1. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2},$ $(x = \operatorname{tg} \varphi) \quad \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$
2. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx,$ $(x-1=z^2) \quad 4 - 2\operatorname{arctg} 2.$
3. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dt}{t \sqrt{t^2+1}},$ $\left(t = \frac{1}{x}\right) \quad \ln \frac{3}{2},$
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta d\theta}{6 - 5\sin \theta + \sin^2 \theta},$ $(\sin \theta = t) \quad \ln \frac{4}{3}.$
5. $\int_0^a \frac{x^3 dx}{a^3 + x^2},$ $(a^3 + x^2 = z^2) \quad \frac{a^2}{2} (1 - \ln 2).$

$$6. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \quad (\sqrt{x} = t) \quad 4 - \ln 9.$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx, \quad (\cos x = t) \quad \frac{1}{3}.$$

$$8. \int_0^4 \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} \, dx, \quad (\sin x - \cos x = t) \quad \frac{1}{4} \ln 3.$$

$$9. \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t - t^2}}, \quad (t = 3 \sin^2 \varphi) \quad \pi.$$

$$10. \int_0^{\ln 5} \frac{e^t \sqrt{e^t - 1}}{e^t + 3} \, dt, \quad (e^t - 1 = x^2) \quad 4 - \pi.$$

III. Ниссә-ниссә интеграллама методу илә ашагыдакы интеграллары һесаблајын.

Ч а л ы ш м а л а р:

Ч а в а б л а р:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx, \quad 1.$$

$$2. \int_0^{\pi} x \sin 3x \, dx, \quad \frac{\pi}{3}.$$

$$3. \int_0^5 \arccos x \, dx, \quad 1.$$

$$4. \int_0^1 t^2 \sin t \, dt, \quad -2 + (\cos 1 + 2 \sin 1).$$

$$5. \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx, \quad -4\pi.$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx, \quad \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} + 1).$$

$$7. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx, \quad \frac{\pi}{4} a^2.$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x dx, \quad 0.$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x dx, \quad \frac{1}{m+1}.$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x dx, \quad -\frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{m+1}.$$

$$11. \int_0^1 x e^{-x} dx, \quad 1 - \frac{2}{e}.$$

$$12. \int_0^3 \ln(3+x) dx, \quad 3(\ln 12 - 1).$$

IV. Ашагыдакы барабарликларин догру олдугуну исбат
един.

$$1. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

$$2. \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx.$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

$$4. \int_{-a}^a f(x^2) \cos x dx = 2 \int_0^a f(x^2) \cos x dx.$$

$$5. \int_{-a}^a f(\cos x) \sin x dx = 0.$$

$$6. \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

бурада $f(x)$ кэсилмэз функциядыр.

МҮӘЛЛӘН ИНТЕГРАЛЫН ҮМУМИЛӘШМӘСИ

§ 1. БИРИНЧИ НӨВ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛ

Мүәллән интегралын тә'рифини верәркән биз a вә b сәр-
һәлләринин сонлу олдуғуну вә $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ -дә
мәһдуд олдуғуну фәрз етмишдик. Инди исә Риман интегра-
лынын тә'рифини, бу ики шәрт позулдуғу һаллар үчүн үму-
миләшдирәк. Биринчи һалда интеграллама сәрһәдинин сонсуз
олдуғуну фәрз едәк.

Ашағыдакы үч һала баһар:

- 1) $a \leq x < +\infty$;
- 2) $-\infty < x \leq b$;
- 3) $-\infty < x < +\infty$.

Биринчи һала баһар: $f(x)$ функцијасынын $a \leq x < +\infty$ об-
ластында тә'јин олдуғуну вә $A > a$ бәрәбәрсизлијини өдәјән
истәнилән A әдәди үчүн $\int_a^A f(x) dx$ Риман интегралынын вар-
лығыны фәрз едәк вә

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$

кими ишарә едәк.

Тә'риф.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

лимити варса вә сонлудурса, онда бу лимитә $f(x)$ функци-
јасынын $[a, +\infty]$ областында биринчи нөв гејри-мәхсуси
интегралы дејилир вә

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

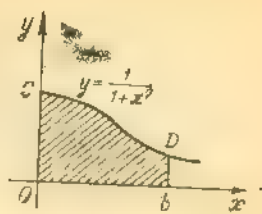
илә ишарә едилир. Лимит сонлудурса (1) гејри-мәхсуси ин-
тегралы јығылан, лимит олмәзса вә ја сонлу дејилсә да-
ғылан адланыр вә

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

кими јазылыр.

Мисал. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ әриси, Ox мүс-
бәт жарымоху вә $x=0$ дүз хәтти илә
әһәтә олунмуш сәһәни тапын (шәкил 14).

■ Ахтарылан сәһәни һесабламағ үчүн
ихтијари $b > 0$ кәтүрәк вә $S_b = \int_0^b f(x) dx$
дүстурундан истифадә едәк. Бу һал үчүн



Шәкил 14

$$S_b = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b$$

кв. вәһид олур. $x=b$ ординатыны саға доғру һәрәкәт етдир-
мәклә b -ни $+\infty$ -а јахынлашдырағ. Бу һал үчүн сәһәнин бә-
јүмәси ашкардыр.

Лакин сәһә нә гәдәр бәјүрсә-бәјүсүн јенә дә сонлу ола-
рағ галыр.

Доғрудан да,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Аналоги оларағ,

$\int_{-\infty}^b f(x) dx$ вә $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интегралларынын јығылмасы вә ја
дағылмасына тә’рифләр верилир.

Јә’ни

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Бурада a вә b бири о бириндән асылы олмајарағ $a \rightarrow -\infty$,
 $b \rightarrow +\infty$. Бу лимитләр варса вә сонлудурса, онда (2), (3)
гејри-мәхсуси интеграллары јығылан, әкс һалда дағылан ад-
ланыр.

Верилән тә’рифдән чыхыр ки, $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ геј-
ри-мәхсуси интеграллары јығылырса, онда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ гејри-
мәхсуси интегралы да јығылыр вә

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

бәрабәрлији доғрудур (бурада a истәнилән һәгиги әдәддир).

Гејд. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мәхсуси интегралы јығыландырса вә $b > a$

истәнилән әдәддирсә, онда $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ интегралы да јығылан олар вә

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Гејри-мәхсуси интегралын хассәләри

Гејри-мәхсуси интеграллар, ујғун олараг сонлу парчада мүүјән интегралда лимитә кечмәклә алындығындан, мәхсуси интегралларда лимитә кечмә мүмкүн олан бүтүн хассәләр гејри-мәхсуси интеграллар үчүн дә доғрудур.

Хассә 1. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы јығыландырса, онда $\int_a^{+\infty} \kappa f(x) dx$ интегралы да јығылан олар, вә $\int_a^{+\infty} \kappa f(x) dx = \kappa \int_a^{+\infty} f(x) dx$ бәрабәрлији доғрудур, бурада κ —сабит әдәдир.

Әкәр $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы дағыландырса, онда $\int_a^{+\infty} \kappa f(x) dx$ интегралы да дағыландыр.

Хассә 2. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ вә $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ интеграллары јығыландырса, онда $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm \varphi(x)] dx$ јығыландыр вә

$$\int_a^{+\infty} [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

олар.

Хассә 3. $f(x)$ функцијасы $[a, +\infty[$ јарыминтервалында мәнфи дејилсә, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq 0$ олар.

Көрүндүжү кими гејри-мәхсуси интегралда хәттилик хас-сәси сахланылыр. Бундан башга бир чох теоремләр, о чүм-лэдән, һиссә-һиссә интеграллама, әвәзетмә вә с. гејри-мәх-суси интеграл үчүн дә доғрудур.

Гејд. $f(x)$ функцијасынын $[a, +\infty[$ јарыминтервалында тәјин олу-дугуну вә бу интервалын һәр бир сонлу $[a, b]$ парчасында интеграллан-олдугуну фәрз едәк.

Бу функцијанын һәмин јарыминтервалда ибтидан функцијасы варса, онда $\forall A \geq a$ үчүн.

$$\int_a^A f(x) dx = F(x) \Big|_a^A = F(A) - F(a).$$

Алынган дүстурдан ашкардыр ки, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мәхсуси интегралынын варлығы үчүн $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ сонлу олмалыдыр. Бу лимити шәрти олар $F(+\infty)$ илә ишарә етсәк, алырыр:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \quad (4)$$

Авалож и оларар

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty), \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) \quad (6)$$

кими јазылыр.

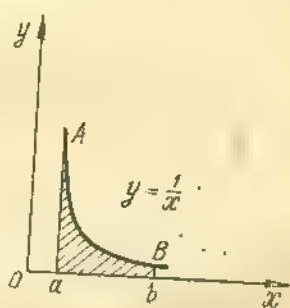
(4), (5) вә (6) дүстурлары интеграллама сәрһәдләри сон-суз олан һал үчүн Нјутон-Лејбнис дүстурунун үмумиләшмиш һалыдыр.

Јухарыда сөјләдикләримизә аид бир нечә мисалын һәлли-ни верәк.

Мисал 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ әјрис, Ox y мүсбәт јарымоху вә $x=a$, $x=b$ орди-натлары илә әһәтә олунмуш әјрихәтли трапесијанын саһәсини тапмалы (шә-кил 15).

■ Истәнилән $b > 0$ көтүрәк. Әјрихәтли трапесијанын саһәси

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Шәкил 15

дүстүрү илэ тэ'јин едилдијиндэн

$$S = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a$$

олар. Инди исэ b -ни $+\infty$ -а јакынлашдырсаг S саһәси ар-
тар вэ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$$

Демәли, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ интегралы дағыландыр. ■

Мисал 2. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ гејри-мәхсуси интегралынын α -нын һан-

сы гијмәтиндә јығылан вэ ја дағылан олдуғуну көстәрин
(бурада $\alpha > 0$ вэ α -һәгиги әдәдләрдир).

■ $\alpha = 1$ олдугда интегралын дағылан олдуғуну көрдүк,
 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функцијасы истәнилән $A > 0$ үчүн $[a, A]$ парча-
сында интегралланан олдуғундан

$$F(A) = \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^A = \frac{A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (\alpha \neq 1)$$

$\alpha > 1$ олдугда, $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ олур.

$\alpha > 1$ һалы үчүн лимит јар вэ сонлудур, онда интеграл
јығыландыр.

$\alpha \leq 1$ олдугда лимит сонсузлудур вэ бу һал үчүн интег-
рал дағыландыр. ■

Мисал 3. $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ гејри-мәхсуси интегралынын јығы-
лыб вэ ја дағылмасыны арашдырын.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin x \, dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin x \, dx = - \lim_{A \rightarrow +\infty} (\cos A - \cos 0) = \\ &= - \lim_{A \rightarrow +\infty} \cos A + 1. \end{aligned}$$

$A \rightarrow +\infty$ олдугда $\cos A$ -нын лимити олмадығындан интег-
рал дағыландыр. ■

Мисал 4. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin \beta x dx$ ($a > 0$) интегралынын жығылан оллуб-олмадығыны тэдбиг етмәли.

$$\begin{aligned} u &= \sin \beta x & du &= \beta \cos \beta x dx \\ dv &= e^{-ax} dx & v &= -\frac{1}{a} e^{-ax} \end{aligned}$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстүрүнү тэдбиг етсәк,

$$F(x) = -\frac{a \sin \beta x + \beta \cos \beta x}{a^2 + \beta^2} e^{-ax}$$

ибтидан функцијасы тапылыр вә $F(+\infty) = 0$; $F(0) = -\frac{\beta}{a^2 + \beta^2}$

олдуғундан

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin \beta x dx = F(x) \Big|_0^{+\infty} = F(+\infty) - F(0) = \frac{\beta}{a^2 + \beta^2}.$$

Аналоги оларар,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos \beta x dx = \frac{a}{a^2 + \beta^2}$$

алынар. Демәли, һәр ики интеграл жығыландыр.

§ 2. ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫН ЖЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТИ

Әввәлчә

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

интегралына бахаг. Бу интегралын жығылан вә дағылан олмасыны јохламаг үчүн тәтбиг олуан әләмәтләр $\int_a^b f(x) dx$ вә

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мәхсуси интеграллары үчүн дә тәдбиг еди-лә биләр. (1) интегралынын жығылан олмасы мәсәләси $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ функцијасынын $b \rightarrow +\infty$ олдугда лимитинин вар-

лығы илә әлагәдар олдуғундан дәјишән кәмијјәтин лимитинин варлығына аид әләмәтә охшар оларар гејри-мәхсуси интегралын жығылмасы үчүн дә зәрури вә кафи әләмәт сөјдәмәк олар.

Теорем 1. (Коши эламэти) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гейри-мэхсуси интегралынын жығылан олмасы үчүн зарури вэ кафи шэрт, ихтијари $\varepsilon > 0$ үчүн елэ $B > a$ эдэдинин олмасы-дыр ки, истэнилэн $b_1, b_2 > B$ эдэдлэри үчүн

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (2)$$

өдэнилсин.

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) \quad (3)$$

($a < x < +\infty$) интегралынын жығылан олмасы $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ лимитинин варлыгы илэ бағлыдыр. Лимитин варлыгы исэ өз нөв-бэсиндэ Коши эламэтинин өдэнилмэси илэ эквивалентдир. Јэ'ни ихтијари $\varepsilon > 0$ эдэдинэ көрэ елэ $B > a$ вар ки, истэни-лэн $b_1, b_2 > B$ үчүн $F(b_2) - F(b_1) < \varepsilon$ өдэнилмэлидир.

$$(3) \text{ бэрэбэрлијиндэн, } F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(t) dt$$

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(t) dt \right| = |F(b_2) - F(b_1)|$$

вэ

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(t) dt \right| < \varepsilon$$

алынар. (2) исбат олунду. ►

Теорем 2. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ гейри-мэхсуси интегралы жығыландырса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы да жығылан олар.

► $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралы жығылан олдуғу үчүн ихти-јари $\varepsilon > 0$ үчүн елэ $B > a$ олмалыдыр ки, $b_1, b_2 > B$ олдуғда

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \quad (4)$$

олар.

Дикэр тэрэфдэн мүүжэн интегралын хассэсинэ көрө

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \quad (5)$$

(4) вэ (5)-дэн

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

барабэрсизлији алыныр. Онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мэхсуси интегралы јығылан өлар.

Тэ'ригб. 1. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ гејри-мэхсуси интегралы јығыландырса, онда (1) интегралына мүтлэг јығылан гејри-мэхсуси интеграл дејилир.

Теорем 3. (мүгајисэ эламэти) $a \leq x < +\infty$ јарым-интервалында

$$|f(x)| \leq g(x)$$

шэрти өдэнилизсэ вэ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ гејри-мэхсуси интегралы јығыландырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мэхсуси интегралы да јығылар.

◀ Шэртэ көрө $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ гејри-мэхсуси интегралы јығыландыр. Онда ихтијари $\varepsilon > 0$ көрө елэ $B > a$ тапмаг мүмкүндүр ки, истэнилен $b_1 > B$ вэ $b_2 > B$ эдэдлэри үчүн

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$$

олар. Дикэр тэрэфдэн

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x) dx$$

олдугу үчүн

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорем 4. x -ин кифажэт гэдэр бөжүк гүжмэтлэриндэ $\lambda |f(x)| < c$ бэрэбэрсизлији өдэнилисэ (бурада λ —сабит эдэддир), онда $\lambda > 1$ олдугда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы жығыландыр. Елэ $c > 0$ [эдэди варса ки, $f(x) \geq \frac{c}{x^\lambda}$ ($0 < a \leq x < +\infty$) $\lambda \leq 1$ олдугда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы дагылан олар.

Бу теоремин исбаты бундан габагкы [теоремдэ $g(x) = \frac{c}{x^\lambda}$ көтүрмэклэ алыныр. ►

Теорем 5. $\varphi(x)$ функцијасы $x \geq a > 0$ истэнилэн гүжмэтиндэ кэсилмээздирсэ вэ елэ сабит $c > 0$ варса ки, $x > a$ гүжмэтиндэ

$$\left| \int_a^x \varphi(x) dx \right| < c \quad (6)$$

шэрти өдэнилисэ, онда $\lambda > 0$ олдугда

$$\int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} dx \quad (6)$$

интегралы жығыландыр.

$$\triangleleft \quad \int_a^x \varphi(u) du = F(x)$$

илэ ишарэ етсэк, (6) шэргиндэн $|F(x)| < c$ (7) ($a < x < +\infty$) алынар.

(6)-дан һиссэ-һиссэ интеграл алсар,

$$\int_a^x \frac{\varphi(u)}{u^\lambda} du = \int_a^x \frac{F'(u)}{u^\lambda} du = \frac{F(u)}{u^\lambda} \Big|_a^x + \lambda \int_a^x \frac{F(u)}{u^{\lambda+1}} du \quad (8)$$

олар.

$$F(a) = 0 \text{ вэ } \left| \frac{F(x)}{x^\lambda} \right| < \frac{c}{x^\lambda}$$

олдуғундан, $x \rightarrow +\infty$ олдугда (8) бэрэбэрлијинин сағ тэрэфиндэки биринчи һэдд сыфыр, икинчи һэддин лимити исэ

$$\lambda \int_a^{+\infty} \frac{F(u)}{u^{\lambda+1}} du \quad (9)$$

олур. (9) интегралы (7) шэртинэ көрө вэ теорем 4-ү нэзэрэ алсаг $\lambda > 0$ гиҕимэтиндэ (мүтлэг) ығылан олур.

Белэликлэ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{\varphi(u)}{u^\lambda} du = \int_a^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^\lambda} du$$

лимитин варлыгы исбат олур. Бу лимит гиҕимэтчэ мүтлэг ығылан (9) интегралы илэ үст-үстө дүшүр.

Теорем 5-ин көмөҕи илэ практики аһэмиҕэтэ малик олан бир чох интегралларын ығылан олмасыны көстөрмөк олар.

Мисал.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (10)$$

интегралынын ығылан вэ ја дағылан олдуғуну көстөрүн.

■ Теорем 5-и тэтбиг етсэк,

$$\left| \int_0^x \sin u du \right| < |1 - \cos x| < 2 \quad (0 < x < +\infty)$$

(7) шэрти Һөдэнилер. Демэли, верилмиш интеграл ығыландыр. ■

Тэ'риф 2.

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

дағылан,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (11)$$

ығылан оларса, онда (11) интегралына шэрти ығылан интеграл деҕилир.

Гејд. (10) интегралынын мүтлэг ығылан олмадыгыны (вэ ја шэрти ығылан олдуғуну) көстөрөк. Башга сөзлө,

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \quad (12)$$

дағылан ($a > 0$) олар. Һэҕигэтэн $\sin^2 x \leq |\sin x|$ олдуғу үчүн

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx > \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{(-\cos 2x)}{2x} dx$$

олар. $2x = u$ эвэзлэмэси апарсаг,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du. \quad \left| \begin{array}{c|c} x & u \\ \hline a & 2a \\ +\infty & +\infty \end{array} \right|$$

$\int_{2a}^{+\infty} u^{-1} \cos u du$ интегралы жығылан вэ $\int_{2a}^{+\infty} u^{-1} du$ интегралы дағылан олдуғу үчүн (12) интегралы дағыландыр.

Теорем 6. (Дирихле-Абел эламэти) $f(x)$ вэ $g(x)$ функцијалары ашағыдакы үч шэрти өдәјирсә:

1. $f(x)$ функцијасы $[a, +\infty[$ жарыминтервалында кәсилмәздирсә вэ һәммин областда онун мәһдуд ибтидаи функцијасы варса;

2. $g(x)$ функцијасы $[a, +\infty[$ жарыминтервалында тәјјин олунмуш монотон артмајан вэ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ оларса;

3. $g(x)$ функцијасынын $[a, +\infty[$ жарыминтервалында кәсилмәз $g'(x)$ төрәмәси варса, онда

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

интегралы жығыландыр.

◀ Исбат етмәклән өтрү гејри-мәхсуси интегралын жығылан олмасы үчүн Коши эламәтиндән истифадә едәк, јә'ни истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә B әдәли вар ки, истәнилән $A_1, A_2 > B$ үчүн

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| < \varepsilon$$

олдуғуну көстәрәк.

Шәртә көрә $f(x)$ функцијасынын мәһдуд ибтидаи функцијасы вар. Бу ибтидаи функцијаны $F(x)$ илә ишарә едәк.

Шәртә көрә $|F(x)| \leq M$.

Инди исә $\int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx$ интегралыны һиссә-һиссә интеграллајар.

$g(x) = u$ $f(x) dx = dv$	$g'(x) dx = du$ $v = \int_a^x f(x) dx = F(x)$
----------------------------------	--

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx - F(x) g(x) \right|_{A_1}^{A_2} = \int_{A_1}^{A_2} F(x) g'(x) dx \quad (13)$$

артан олмайыб $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ олдугундан $g'(x) \leq 0$ вә $g(x) \geq 0$ олар. (13) барабарлијини гијм тандирсәк,

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \leq M [g(A_1) - g(A_2)] = M \int_{A_1}^{A_2} |g'(x)| dx.$$

Дикар тәрәфдән,

$$M \int_{A_1}^{A_2} |g'(x)| dx = Mg(A_1) - Mg(A_2)$$

олдугундан,

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| \leq 2Mg(A_1). \quad (14)$$

Шәртә көрә $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ олдугундан ихгијари $\epsilon > 0$ көрә елә B сечмәк олар ки, $A_1 \geq B$ олдугда $g(A_1) < \frac{\epsilon}{2} M$ олар. (14) барабәрсизлијиндән истәнилән $A_1, A_2 > B$ үчүн

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| < \epsilon$$

олар. ►

Гејд. Бу теоремин исбатында 3-чү шәртий өдәниләмәси артыгдыр.

Бу шәрт аңчаг һиссә-һиссә интеграллама методундан истифадә етмәк үчүн тәләб олунмушдур. Теоремин исбатында 3-чү шәртдән истифадә етмәмәк үчүн $\int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx$ интегралына орта гијмәт теоремини тәтбиғ етмәк кифәјәтдир.

Мисал 1.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin x dx \quad (\alpha > 0) \quad (15)$$

интегралынын јығылан олуб вә ја олмадығыны арашдырын.

■ $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ функцијалары теоремин бүтүн шәртләрини өдәдијиндән (15) интегралы јығыландыр.

Мисал 2.

$$\int_1^{\infty} \sin^2 x dx = \int_1^{\infty} x \sin^2 x \frac{1}{x} dx. \quad (16)$$

■ $f(x) = x \sin^2 x$; $g(x) = \frac{1}{x}$ көтүрсәк теоремин бүтүн шәртләри өдәнилир. Демәли, (16) интегралы јығыландыр. ■

§ 3. ИКИНЧИ НӨВ ГЕЈРИ-МӨХСҮСИ ИНТЕГРАЛ

Индијэ кими интеграл аңлаышыны верэрк н интегралалты функцияны һәмшэ мүјјән парчада мөһдуд олдуғуну фарз етмишдик.

Инди исэ бә'зи һалларда $f(x)$ функциясы гејри-мөһдуд олдуғда мүјјән интеграл аңлаышыны үмумлаштырмак мүмкүн олдуғуну көстөрөк. Бу мәсәллә әввәлчә бир мисала баһаг.

Мисал.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Бу функция $[0, 1]$ парчасында $x \rightarrow 0$ олдуғда соғсу артыр. Беләликлә, функция $x = 0$ -дан башта парчаны һәр бир нөптәсиндә көсәлмәз олматла аймаг $x = 0$ нөгт.синдә кәһләндир.

Демәли, $f(x)$ функциясы $[0, 1]$ парчасында гејри-мөһдуд олмасына бахмәјараг, истәвилән гәдәр кичик $0 < \varepsilon$ көзүрмәклә $[0, 1] \supset [\varepsilon, 1]$ парчасында бу функция көсәлмәз олдуғундан интегралланаидыр:

$$\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}). \quad (1)$$

Бу гәјмә шәкилдә штрихлы имыш әрихәтлә трапесин саһәсини ифалә едир (шәкил 16).

Ләкин $\varepsilon > 0$ кичилидикчә ($\varepsilon \rightarrow 0$), штрихлы имыш мүстәви һиссәсини истәвилән гәдәр бөјүмәсинә бахмәјараг (1) бәрабәрлигнән көрүндүјү кими онун саһәси мөһдуд олараг тәдир вә гәјмә ги 2-јә бәрабәр олур. Бу лимитин гәјмәти тәби

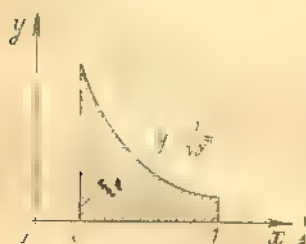
оларыг Ox оху вә $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ әјрисин илә сһатә олуиумуш саһәсини әдәти шәјмәтинә бәрабәр олур. Беләликлә, һәндәси сһа

раг демәк олар ки, фигур сонсуз олараг мүстәви һиссәсини әһтә етмәсинә бахмәјараг онун саһәси мөһдуд галыр.

Мәсәләјә аналитик нөгтеји-нәзәрлә јахынлашыларса $[0, 1]$ парчасында интегралалты функция гејри-мөһдуд

олдуғундан ахтарылан саһә $\int_0^1 f(x) dx$

интегралы илә тәјјән олуна билмир.



Шәкил 16

Лакин $[\varepsilon, 1]$ парчасында функција интегралланан олдугундан
 эввэлчә $\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ интегралы вә сонра $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ лимити
 тапылыр.

Инди исә функција парчада гејри-мәһдуд олдугда гејри-мәхсуси интеграла үмуми тә'риф верәк.

Тутаг ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд дејил.
 Бурада бир нечә һала баһаг.

I һал. $f(x)$ функцијасы b нөгт сә атрафында гејри-мәһ-дуд олсун.

Тә'риф 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасыноа гејри-мәһ-дуд вә истәнилән, $[a, b - \delta]$ парчасыноа мәһдуд $(x - b)$ нөг-тәсинин истәнилән атрафыноа гејри-мәһдуд) олмагга һәмин

парчаоа интегралланан вә сонлу $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$ варса, бу

лимитә $f(x)$ -ин икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралы, $f(x)$ -ә исә $[a, b]$ парчасыноа интегралланан функција дејилир вә

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$$

шәклиндә јазылыр. Бу һалда $\int_a^b f(x) dx$ гејри-мәхсуси интег-ралы јығыландыр дејилир.

Хүсуси һалда $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ -дә $F(x)$ кими иб-тидаи функцијасы варса вә $F(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә кәсил-мәздирсә, онда $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә интегралланандыр вә

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} F(b - \delta) - F(a) = F(b) - F(a).$$

олар.

II һал. $f(x)$ функцијасы $x - a$ нөгтәси атрафында гејри-мәһдуд оларса, бу һал үчүн дә аналогји тә'риф верилир.

Тә'риф 2. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасыноа гејри-мәһ-дудоурса, истәнилән $[a + \delta, b]$ ($0 < \delta < b - a$) парчасында

интегралланан вә сонлу $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx$ варса, бу лимитә

$[a, b]$ парчасында $f(x)$ функцијасынын икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралы дејилир вә

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx$$

шаклиндэ жазылыр. Белэ олдугда гејри-мэхсуси интеграл жығыландыр дејилир.

Гејд 1. $f(x)$ функцијасы анчаг $x = a$, $x = b$ нөгтәһини әтрафында гејри-мәһдуд оларса вә

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^c f(x) dx; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_c^{b-\delta} f(x) dx \quad (c \in [a, b])$$

лимитләри варса, бунлар гејри-мэхсуси интеграллар адланыр вә $\int_a^b f(x) dx$ кими ишарә едилер.

III һал. $f(x)$ функцијасы $x = c \in [a, b]$ нөгтәһинин истәһинлән әтрафында гејри-мәһдуд вә истәһинлән $[a, c - \delta_1]$ $[c + \delta_2, b]$ парчаларында ($0 < \delta_1 < c - a$), ($0 < \delta_2 < b - c$) интегралланандырса вә сонлу $\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx$, $\lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx$ лимитләри варса, онда $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ -дә икинчи нөв гејри-мэхсуси интегралы:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx$$

жығыландыр дејилир.

Гејд 1. $\int_a^c f(x) dx$ вә $\int_c^b f(x) dx$ интегралларындан бири дағылан олдугда

$\int_a^b f(x) dx$ интегралы да дағылан олар.

Аналоги олараг $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$) нөгтәләри әтрафында $f(x)$ функцијасы гејри-мәһдуд олдугда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \quad (2)$$

жазмагла гејри-мэхсуси Римән интегралыны алмәг олар. Бурада (2) бәрәбәрлијиниң сағында иштирак едән гејри-мэхсуси интегралларын жығылан олдугу нәзәрдә тутулар.

Гејд 2. Интегралалты функција гејри-мәһдуд олдугда бу интегралы садә әвәзләмә вәситәсилә һәмишә сәнсуз лимитли интеграла кәтирмәк мүмкүндүр. һәгигәтән, тутаг ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасынын сол уң нөгтәһиндә гејри-мәһдуддур.

Онда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (3)$$

олар. Бурада $x = a + \frac{1}{t}$ авазләмәсәни апарсаг, $dx = -\frac{dt}{t^2}$;

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = - \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a-\varepsilon}} f\left(a + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a-\varepsilon}} \varphi(t) dt.$$

x	t
$a + \varepsilon$	$\frac{1}{\varepsilon}$
b	$\frac{1}{b-a}$

Бурада $\varphi(t) = \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right)$ вә беләликлә,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{a-\varepsilon}} \varphi(t) dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

Гејд 3. Икинчи нөв гејри-мәхсуси интеграллар үчүн дә, биринчи нөв гејри-мәхсуси интегралларда олдуғу киби аналожи оларат Коши теоремини вә мугајясә теоремләрини исбат етмәк олар.

§ 4. ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫН БАШ ГИЈМӘТИ

$x = c \in (a, b)$ нөггәси әтрафында $f(x)$ функцијасы гејри-мәһдуд олдуғда онун гејри-мәхсуси интегралынын

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c+\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon_2}^b f(x) dx = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$) дүстүрү илә тә'јин олдуғуну көрдүк. Бурада ε_1 вә ε_2 бири дикәриндән асылы олмајараг сыфра јахынлашыр вә $\varepsilon_1 \in [0, c-a]$, $\varepsilon_2 \in [0, b-c]$ истәнилән әдәдләр, $f(x)$ функцијасы исә $[a, c-\varepsilon_1]$ вә $[c+\varepsilon_2, b]$ парчасында интегралланан олдуғу фәрз олунур.

Хүсуси һалда (1) ифадәсиндә $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow 0$ оларса вә

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right] \quad (\varepsilon > 0)$$

сонлу лимити варса, бу лимитә Коши мә'нада интегралын

баш гѳмѳти деѳилир вѳ $V.P. \int_a^b f(x) dx$ кимѳ ишарѳ едилѳб,

$$V.P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right] \quad (\varepsilon > 0)$$

ѳазылыр. Бурада $V.P.$ хѳрфлѳри (Valeur principale—баш гѳмѳт) чох заман ѳазылмыр.

Баш гѳмѳтѳ кѳрѳ интеграл бѳ'зѳн сингулѳр интеграл ад-ланыр. Бир нечѳ мисалын хѳллини верѳк.

Мисал 1. $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$, $c \in (a, b)$ Гѳјри-мѳхсуси интегралы-

нын баш гѳмѳтини тапмалы.

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2)$$

(2) бѳрабѳрлѳјиндѳн (кѳрѳнѳр ки, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ олдугда бу чѳмин лимити ѳохдур. Лакин $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ оларса, (1) иѳадѳси-нин $\varepsilon \rightarrow 0$ олдугда алынѳн лимити интегралын баш хиссѳси олар вѳ

$$V.P. \int_a^b f(x) dx = V.P. \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}. \quad \blacksquare$$

Интеграллама сѳрхѳдлѳри сонсуз олдугда да интегралын баш гѳмѳти анлаѳышыны вермѳк олар.

Хѳр бир сонлу парчада интегралланѳн $\varphi(x)$ функциѳасы-нын сонсуз лимитли гѳјри-мѳхсуси интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow +\infty \\ N_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-N}^N \varphi(x) dx$$

бѳрабѳрлѳји илѳ тѳ'јин едилѳр. Бурада N_1 вѳ N_2 бири дѳкѳ-риндѳн асылы олмаѳараг сонсузлуѓа ѳахынлашыр. Бѳ'зѳн бу ѳајда илѳ тѳ'јин олунмуш гѳјри-мѳхсуси интеграл олмаѳа да билѳр.

Лакин бу интегралын баш гѳмѳти ола билѳр. Јѳ'ни

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \varphi(x) dx$$

сонлудур.

Бу типли интеграллара (сингулѳр интеграллар деѳилир

Гѳјри-мѳхсуси интеграллара анд бир нечѳ мисала бахѳг.

Мисал 2. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}$ интегралыны арашдырмалы.

■ $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$, $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуд олдуғундан бу интеграл икинчи нөв гејри-мәхсуси интегралдыр. $F(x)$ функцијасы $f(x)$ -ин нбтидаи функцијасы олмагла

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln |x-a|, & \alpha = 1 \end{cases}$$

олдуғундан $\alpha < 1$ олдуғда $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ лимити вар. Она көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында ($\alpha < 1$) интегралланандыр. $\alpha = 1$ олганда бу функција интегралланан дејил. ■

Мисал 3. $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ интегралыны тапмалы.

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \sin x dx = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} [-\cos N + \cos(-N)] = 0. \quad \blacksquare$$

Мисал 4. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}$ интегралынын јығылан олуб-олма-

дығыны арашдырын.

■ Интегралалты функција гејри-мәһдуд олдуғундан

$$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon+1}^e (\ln x)^{-\frac{1}{3}} d(\ln x) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} \right) \Big|_{\varepsilon+1}^e = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)} \right) = \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

Мисал 5. $\int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$ интегралынын јығылан вә ја

дағылан олдуғуну көстәрин.

■ $f(x) = 1 - \cos \frac{2}{x} = 2 \sin^2 \frac{1}{x}$ функцијасы $x \geq 1$ олдуғда мүсбәт кәсилмәз функцијадыр вә $x \rightarrow +\infty$ үчүн $2 \sin^2 \frac{1}{x} \sim 2 \left(\frac{1}{x}\right)^2$ өдәнилик. Мүгајисә әләмәтинә көрә верилмиш интеграл јығыландыр. ■

Мисал 6. $\int_1^{\infty} \ln \frac{e^{\frac{1}{x}} + (n-1)}{n} dx$ ($n > 0$ интегралынын жыгы-

лан ва жа дагылан олдуғуну жохлайын.

$$\blacksquare \quad f(x) = \ln \frac{e^{\frac{1}{x}} + (n-1)}{n} = \ln \left(1 + \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{n} \right),$$

$\frac{1}{n} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ олдугда сонсуз кичик олдуғундан,

$$\bullet \quad f(x) \sim \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{n} \sim \frac{1}{nx},$$

башга сөзлө

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{nx}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{n}.$$

Демели, мугајисе эламетинө көрө верилмиш интеграл дагыландыр. \blacksquare

1. Ашағыдакы гејри-мәхсуси интеграллары ҳесаблајын.

Ч а л ы ш м а л а р:

Ч а в а б л а р:

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}, \quad (a > 1),$

$$\frac{1}{a-1}$$

2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 16},$

$$\frac{\pi}{8}$$

3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3},$

$$\frac{3\pi}{3\sqrt{3}}$$

4. $\int_0^{\infty} e^{-5x} \cos 4x dx,$

$$\frac{5}{41}$$

5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x},$

дағылыр.

6. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$

$$\frac{\pi}{2}$$

Ашагыдакы интегралларын жыгылыб вэ ја дағылмасыны арашдырын.

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}},$ дағылыр.

2. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + a^2},$ дағылыр.

3. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + x + 1},$ дағылыр.

4. $\int_0^{\infty} \cos x dx,$ дағылыр.

5. $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx,$ дағылыр.

III Фәсил

МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘГРИБИ ҲЕСАБЛАНМАСЫ

Практики әһәмијәти олан] бир чох мәсәләләр]мүәјјән интегралын һесаблинамасына кәтирилир. Бу һәд, үмумијәтлә бу вә ја дикәр хәтә илә тәгриби һесаблиныр.

Мүәјјән интегралын тәгриби һесаблама методларындан бири интегралын тәрифинлә верилир. Белә ки, мүәјјән интеграл, интеграл чәмләринин лимити кими верилдијиндән дүзәлмиш чәм, мүәјјән хәтә илә интегралын тәгриби гијмәтидир. Бу методла һесаблама чох һалларда техники чәһәтлән мүрәккәб вә чәгин олдуғундан башга методлар ахтарылыр. Мәлүмдур ки, мүәјјән интегралын һесаблинамасында әсас методлардан бири Нјутон-Лейбнис методдур. Күчлү метод олмагла о, мүәјјән интегралы ибтидан функција илә бағлајыр, јәни $\forall x \in [a, b]$ үчүн $f(x)$ кәсимләдирәд,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Беләликлә, мүәјјән интегралын һесаблинамасы $F(x)$ ибтидан функцијасынын ики гијмәтинин фәрғи илә ифадә олунур. Ибтидан функцијанын варлығы һәдә Нјутон Лейбнис дүстурунун тәтбиг едилмәси үчүн кафи дејил, бу дүстур тәтбиг етмәк үчүн ибтидан функцијанын өзү мәлүм олмалыдыр. Ибтидан функција элементар функцијаларла ифадә едилдији һалларда онун гијмәтинин тәгриби һесаблинамасы методлары

чох јухшы өјржилмишдир. Лакин бә'зән ибтидаи функција-нын варлығына бахмајараг ону елементар функција шәклиндә ифадә етмәк мүмкүн олмур. Белә интеграллара сонлу шәкилдә ачылмајан интеграллар дејилир. Буна көрә дә интегралын гүјмәтинин тәғриби һесаблинамасы методларынын өјрәнилмәси чох вачиб мәсәләдир.

Мүәјјән интегралын тәғриби һесаблинамасы да ашағыдакы методлар мөвчуддур.

§ 1. ДҮЗБҮЧАГЛЫЛАР МЕТОДУ

Тутаг ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсалмәздир.

$\int_a^b f(x) dx$ интегралын ы тәғриби һесаблимаг тәб.б олунур.

◀ Бу мәсәллә $[a, b]$ парчасыны $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ нөгтәләри илә n бәрабәр һиссәјә бөләк.

Бу парчаларын һәр биринин узунлуғ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ олар.

Буралда $x_k = a + k \Delta x_k$ ($k = \overline{0, n}$) нөгтәл риндә интеграл алтындакы функцијанын гүјмәтинин $y_k = f(x_k) = f(a + k \Delta x)$ кими ишарә етмәклә

$$\sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x$$

вә

$$\sum_{k=1}^n y_k \Delta x$$

интеграл чәмләринин аларыг.

Мүәјјән интегралын тә'р фивә сәсән,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x$$

вә

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \Delta x,$$

$\int_a^b f(x) dx$ интегралыннын әв зинә тәғриби олараг ујғун интеграл чәмләрини көтүрмәк тәб.бидир. Јә'ни

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x,$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n y_k \Delta x.$$

вэ ја

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (2)$$

олур. (1) вэ (2) тэгриби барабэрликлэри, дүзбумаглылар методунун дүстурлары адланыр. ►

Бу дүстурларын һэндэси мә'насыны $f(x)$ 0 олан һал үчүн) верәк. $y = f(x)$ әриси, абсисс оху вэ $x = a$, $x = b$ дүз хәтлэри илә шатә олунмуш $aABb$ әррихәтлн трапесијасынын саһәси тәгриби олараг, отурачағы $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, һүндүрлүклэри исә y_0 ,

y_1, \dots, y_{n-1} вэ ја y_1, y_2, \dots, y_n олан n сәјдә дүзбумаглыдан ибарәт олан пилләвари фигурун саһәси илә әвәз едилир (шәкил 17).

Инди исә $\int_a^b f(x) dx$ интегралы (1) вэ (2) дүзбумаглы дүстурлары илә ифалә едилән заман бурахылан хәтанын мүтләг гијмәтини һесаблајаг. Ахтарылан хәтанын һесаблинамасы үчүн $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функцијасынын мәһүл төрәмәјә маллик олдуғуну фәрз едәк.

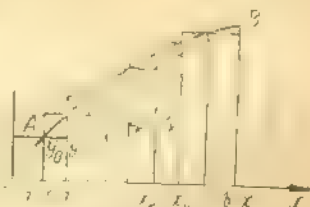
Јә'ни $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ олсун.

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta x \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} y_{k-1} dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})] dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})] dx \right|$$



Шәкил 17

$$|R_n| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})] dx.$$

Шәртә көрә $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында сонлу төрәмәси вар, онда бу функција үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәтбиг етсәк,

$$f(x) - f(x_{k-1}) = (x - x_{k-1}) f'(\xi_k), \quad x_{k-1} < \xi_k < x$$

вә ја

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(\xi_k)(x - x_{k-1})| dx \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^n \left| \frac{(x - x_{k-1})^2}{2} \right|_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{M}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 = \\ &= \frac{M}{2} n \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

алынар.

Беләликлә, $|R_n| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$ олмагла ($n \rightarrow \infty$ олдугда) сифра јахынлашыр. Башга сөзлә, $\int_a^b f(x) dx$ интегралыны $\varepsilon > 0$ хәта илә тәгриби һесабламаг үчүн $[a, b]$ парчасыны $n > \frac{(b-a)^2 M}{2\varepsilon}$ һиссәјә бөлмәк кифәјәтдир. Бурада $\varepsilon > 0$ истәнилән верилмиш әдәддир.

Мисал. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ интегралыны, $n = 10$ олдугда дүзбучаглылар методу васитәсилә тәгриби һесабламалы.

■ $b - a = \frac{\pi}{2} \quad 0 = \frac{\pi}{2}$ парчасыны 10 һиссәјә бөлсәк,

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{10} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157.$$

Инди исә y_0, y_1, \dots, y_{10} ординатларынын гијмәтини

$$y_k = a + kh = 0 + k \cdot \frac{\pi}{20} \quad (k = \overline{0, 10})$$

дүстуру илә һесаблајаг. Логарифма хәткешиндән истифадә едәрәк ашағыдакы чәдвәли јазмаг олар:

x_0	0°	y_0	$\sin 0^\circ$	0.	y_1	0,159
x_1	9°	y_1	$\sin 9^\circ$	0,156	y_2	0,309
x_2	18°	y_2	$\sin 18^\circ$	0,309	y_3	0,454
x_3	27°	y_3	$\sin 27^\circ$	0,454	y_4	0,588
x_4	36°	y_4	$\sin 36^\circ$	0,588	y_5	0,707
x_5	45°	y_5	$\sin 45^\circ$	0,707	y_6	0,809
x_6	54°	y_6	$\sin 54^\circ$	0,809	y_7	0,891
x_7	63°	y_7	$\sin 63^\circ$	0,891	y_8	0,951
x_8	72°	y_8	$\sin 72^\circ$	0,951	y_9	0,988
x_9	81°	y_9	$\sin 81^\circ$	0,988	y_{10}	1,00
x_{10}	90°	y_{10}				
		$\sum_{k=0}^9 y_k$		5,853	$\sum_{k=1}^{10} y_k$	6,853

Беләликлә, (1) вә (2) дүстурлары васитәсилә һесаblasар
 1) би оларар,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx 0,157 \times 5,853 \approx 0,919,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx 0,157 \times 6,853 \approx 1,076$$

алынар. Бу интегралын дәгиг гијмәти исә

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

олар.

Демәли, дүзбучаглы методу илә интегралы һесаблајан за-
 ман 8%-ә јахын хәта едилмишдир.

§ 2. ТРАПЕСИЈАЛАР МЕТОДУ

$[a, b]$ парчасында кәсилмәҗән $f(x)$ функцијасы үчүн
 $\int_a^b f(x) \, dx$ интегралынын трапесијалар методу илә тәҗриби һе-
 сабланмасы мәсәләси илә мәшгул олар.

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн $[a, b]$ парчасыны истәнилән
 $\{x_k\}$ бөлкүсү илә n барабәр һиссәјә бөләк. Истәнилән $1 \leq k \leq n$
 үчүн $\frac{1}{2} [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$ ифадәсинә бахаг.

Бу әдәд истәнилән k үчүн $f(x_{k-1})$ илә $f(x_k)$ арасында
 јерләшир, чүнки шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парча-
 сында кәсилмәздир, демәли $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ парчасында да
 кәсилмәз олар. Онда Коши теореминә (икинчи) әсасән бүтүн
 аралыг гијмәтини алар. Јә'ни, елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси вар ки,

$$\frac{1}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] = f(\xi_k)$$

вә ја

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфинә $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында интеграл чәми кими бахсағ,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (y_{k-1} + y_k).$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right) \quad (1)$$

аларыг.

(1) дүстүру трапесијалар дүстүру атлаыр. Бу дүстүрун һәндәси мәнасыны изаһ етәк.

$f(x) \geq 0$ олан һал үчүн (1) дүстүру $aABb$ әрихәтли трапесијасынын (шәкил 18) саһәсини тәғрибн оларағ һүндүрлүҗү $\frac{b-a}{n} \Delta x$ олан n сая да дүзхәтли трапесијалар ың саһәси илә ифадә едир.

Шәкилдән биринчи трапесијанын саһәси $\frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \right)$, n -чи трапесијанын саһәси $\frac{b-a}{n} \left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$ олар. Онда

$$S = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n}{2} \right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right).$$

Инди исә (1) дүстүрунун хәтәсыны гүјмәтләндирәк, $[a, b]$ ($(b-a) > 0$) парчасында $y = f(x)$ әјрисини бу әјринин үч нөгтәләрини бирләшдирән $y = \varphi(t)$ дүзхәтти илә әвәз едәк. Белә олдуғда

$$\varphi(a) = f(a)$$

$$\varphi(b) = f(b)$$

олар. Һәндәси оларағ әрихәтли



Шәкил 18

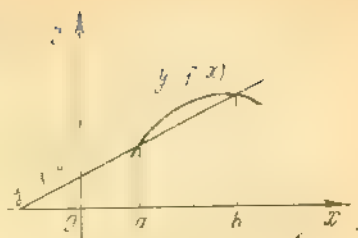
трапесијанын саһәси дүзхәтли трапесијанын саһәси илә әвәз еднәлр. Јә'ни,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(t) dt$$

вә саһә кими,

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} (b - a) -$$

$$= \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a)$$



Шәкил 19

олдуғундан

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

олар (шәкил 19).

$$\int_a^b f(x) dx - (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

фәргини гижмәтләндирәк.

Бу мәгсәдлә $\forall x \in [a, b]$ үчүн

$$f(x) = \varphi(x) + \kappa(x - a)(x - b) \quad (2)$$

әвәз етсәк,

$$\kappa = \frac{f(x) - \varphi(x)}{(x - a)(x - b)} \quad (3)$$

олар.

$[a, b]$ парчасында

$$\omega(z) = f(z) - \varphi(z) - \kappa(z - a)(z - b) \quad (4)$$

функцијасына бахаг. (4)-дән $\omega(a) = \omega(b) = 0$, (3) ифадәсини нәзәр алсаг, $\omega(x) = 0$ алынар.

$\omega(z)$ функцијасы a, b вә x нөгтәләриндә сыфра бәрәбәр олур (бурада $a < x < b$).

$[a, b]$ парчасында әләвә олараг $f(x)$ функцијасынын кәсимәз икинчи тәртиб төрәмәсинин олдуғуну фәрз едәк. Онда $\omega(z)$ функцијасынын да һәммин хәссәни өдәмәси ајдындыр. $\omega(z)$ функцијасына $[a, x]$ вә $[x, b]$ парчаларында Ролл теоремини тәтбиг етсәк, $\omega'(z)$ функцијасы $[a, b]$ парчасынын ики нөгтәсиндә сыфыр олдуғуну дејә биләрик. Белә олдуғда јенә Ролл теореминә көрә бу ики нөгтә арасында елә $z = \xi$ нөгтәси вар ки, һәммин нөгтәдә $\omega''(z)$ функцијасы сыфра бәрәбәр олар.

Бурада $\xi \in [a, b]$ вә x -дән асылдыр. $\omega''(\xi) = f''(\xi) - 2\kappa$ олдуғундан,

$$\omega''(\xi) = f''(\xi) - 2\kappa = 0 \text{ вә } \kappa = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

олар.

ξ дәјишәни x -дән асылы олдуғундан $f''(\xi)$ функцијасы x -дән асылы кәсимләјән функција олур. κ -нын гијмәтини (2)-дә јазсағ

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) (x - a)(x - b)$$

олдуғуну аларағ, сонунчу бәрабәрлијин һәр тәрәфини интегралласағ

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) (x - a)(x - b) dx \quad (4')$$

олар.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \\ &= \int_a^b f(x) dx - (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

олдуғуну нәзәрә алсағ (4') бәрабәрлијин

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} &= \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) (x - a)(x - b) dx \end{aligned} \quad (5)$$

шәклинә күшәр. Бурада $(x - a)(x - b)$ һасили $[a, b]$ парчасында ишарәсини дәјишмәтијиндән вә $f''(\xi)$ функцијасы x -дән асылы кәсимләјән функција олдуғундан (5) бәрабәрлијини сағ тәрәфинә орта гијмәт теоремини тәдбиғ етмәк олар. Белә ки,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) (x - a)(x - b) dx &= \frac{1}{2} f''(\xi^*) \int_a^b (x - a)(x - b) dx = \\ &= -\frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi^*). \end{aligned}$$

Бурада ξ^* әдәди x -ин $[a, b]$ парчасында мүәјјән бир гијмәтидир ($a \leq \xi^* \leq b$). Белә олдуғда (5)-дән

$$\int_a^b f(x) dx \cdot (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} = - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi^*).$$

$[a, b]$ парчасыны $[x_{k-1}, x_k]$ кими барабар ниссэлэрэ бөлсөк

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - (b-a) \frac{y_{k-1} + y_k}{n} = - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k^*)$$

вэ ахырынчыны k -ја көрө чөмлөсөк,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right) = \\ = - \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum f''(\xi_k^*), \end{aligned} \quad (6)$$

$f''(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасында эн бөйүк вэ эн кичик гијмэтлэри M вэ m олсун. Онда $(m \leq f''(\xi_k^*) \leq M)$

$$n \cdot m \leq \sum_{k=1}^n f''(\xi_k^*) \leq n \cdot M$$

вэ ја

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\xi_k^*) \leq M$$

олдугундан $[a, b]$ парчасында x -ин елэ бир $x = \xi_0$ гијмэти вар ки,

$$f''(\xi_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\xi_k^*)$$

вэ ја

$$\sum_{k=1}^n f''(\xi_k^*) = n f''(\xi_0)$$

алынар. Алынан бу гијмэти (6)-да јазсаг

$$\int_a^b f(x) dx - S = - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_0) \quad (7)$$

олур. Бурада

$$S = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right)$$

n сәјда трапесијаларын сәһэлэри чөмидир.

(7) дүстүрү n артдыгча хэтанын тэхминэн $\frac{1}{n^2}$ тәртибдә азалдыгыны көстөрир.

Мисал. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ интегралыны $n = 10$ үчүн трапесија дүстү-
ру илэ һесаблајын.

■ $0 = 1, b = 2$ олдуғундан

$$\Delta x = \frac{1}{n} (b - a) = \frac{1}{10} (2 - 1) = 0,1; \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Һесаблама логарифм хәткеши васитәсилә апарылыр.

x_0	1,0	y_0	1,000
x_1	1,1	y_1	$1/1,1 = 0,909$
x_2	1,2	y_2	$1/1,2 = 0,833$
x_3	1,3	y_3	$1/1,3 = 0,769$
x_4	1,4	y_4	$1/1,4 = 0,714$
x_5	1,5	y_5	$1/1,5 = 0,667$
x_6	1,6	y_6	$1/1,6 = 0,625$
x_7	1,7	y_7	$1/1,7 = 0,588$
x_8	1,8	y_8	$1/1,8 = 0,556$
x	1,9	y_9	$1/1,9 = 0,526$
x_{10}	2,0	y_{10}	$1/2 = 0,500$

$$\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \sum_{k=1}^9 y_k = y_1 + y_2 + \dots + y_9 = 6,187; \quad \frac{1}{2} (y_1 + y_{10}) = 0,750,$$

$$S = \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^9 y_k + \frac{y_1 + y_{10}}{2} \right) = 0,1 (6,187 + 0,750) = 0,6937.$$

Демәли, $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,6937$ олар. Дикәр тәрәфән,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = 0,6931$$

олур. Беләликлә, бурахылан хәтә 2% -ә яхындыр. (7) дүстү-
руна көрә,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = S = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi_0); \quad S = 0,6937; \quad b = 2, \quad a = 1, \quad n = 10$$

вә $1 < \xi_0 < 2$ арасында олдуғундан бу арада истәнилән
 $\xi_0 = 1,5 = \frac{3}{2}$ гијмәтини көтүрә биләрни.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}; f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

олдугундан,

$$f''(\xi_0) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{16}{27},$$

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1^3 \cdot 16}{12 \cdot 10^2 \cdot 27} = 0,0005$$

вə

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,6937 - 0,0005 = 0,6932.$$

§ 3. СИМПСОН' ДҮСТУРУ (ПАРАБОЛА МЕТОДУ)

Бундан габаг трапесија дүстүрүнү чыгаран заман һәр бир кичик $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$ һиссәсиндә $y = f(x)$ эјрисини дүз хәтлә әвәз етдик.

Симпсон методунда исә бу чүр кичик һиссәләрдә $y = f(x)$ эјриси параболә илә әвәз едилир.

Индә исә $y = ax^2 + bx + c$ параболәси, Oy оху вә арала-рындакы мөсәфә $x = h$ олан хәтләрдә әһәтә олунмуш сәһәнин

$$S = \frac{h}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

олдугуну исбат едәк (шәкил 20).

Буралда y_0 әләди Oy оху исхатамәтиндә јөнәлмиш уч ординатларындан бири, y_2 әләди икинчи уч ординатдыр, y_1 исә учлардан ејни мөсәфәтә јерлөшән ординатдыр.

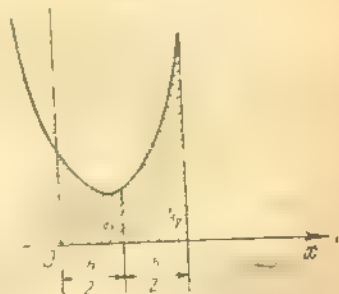
$$\blacktriangleleft y_{x=0} = y_0 = (ax^2 + bx + c)_{x=0} = c,$$

$$\begin{aligned} y_{x=\frac{h}{2}} &= y_1 = (ax^2 + bx + c)_{x=\frac{h}{2}} = y \\ &= \frac{ah^2}{2} + \frac{bh}{2} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{x=h} &= y_2 = (ax^2 + bx + c)_{x=h} = \\ &= ah^2 + bh + c. \end{aligned}$$

Бу ахырынчылардан

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = c + 4a \frac{h^2}{4} + \frac{4bh}{2}$$



¹ Томас Симпсон (1710—1761) ин-килис ријазийатчысыдыр.

$$+4c+ah^2+bh+c=2ah^2+3bh+bc,$$

вэ ја

$$\frac{h}{6} (2ah^2+3bh+bc)=\frac{h}{6} (y_0+4y_1+y_2).$$

Дикәр тәрәфдән,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^h (ax^2+bx+c) dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_0^h = \\ &= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = \frac{h}{6} (3ah^2+3bh+6c). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Мисал. $y=x^2-2x+2$ параболасы, Ox оху вэ $x=0$, $x=3$ ординатлары илә эһатә олунмуш сәһәни тапын.

■ $S=\frac{h}{6} (y_0+4y_1+y_2)$ дүстуруну языб бурада ишти-
рак едән y_0 , y_1 , y_2 вэ h -ы тә'јин едәк.

$$y_{x=0}=y_0=(x^2-2x+2)_{x=0}=2,$$

$$y_{x=1,5}=y_1=(x^2-2x+2)_{x=1,5}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}+2=\frac{5}{4},$$

$$y_{x=3}=y_2=(x^2-2x+2)_{x=3}=3^2-2\cdot3+2=5;$$

$$h=3.$$

$$\text{Демәли, } S=\frac{3}{6} \left(2+4\cdot\frac{5}{4}+5 \right) = 6 \text{ кв. вәһид.} \quad \blacksquare$$

◀ Тутаг ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә кәсилмәздир вэ $[a, b]$ парчасыны $2n$ сәјдә бәрәбәр һиссәјә бөләк.

$$a=x_0 < x_1 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

$$h_k = \frac{b-a}{2n} \quad (1 \leq k \leq 2n),$$

$$y_k = f(x_k) \quad (k = \overline{0, 2n})$$

ишарә едәк.

Һәр һансы $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ парчасында орта нөгтәнин абсиссини x_{2k-1} илә ишарә едиб һәмин парчада $y=f(x)$ әрчисини

$$y=a_k x^2+b_k x+c_k,$$

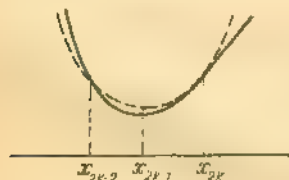
$$M_{2k-2}(x_{2k-2}, y_{2k-2}),$$

$$M_{2k-1}(x_{2k-1}, y_{2k-1}), \quad M_{2k}(x_{2k}, y_{2k})$$

нөгтәләриндән кәчән парабола илә әвз едәк (шәкил 21).

Бурада

$$\varphi_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k \quad (1)$$



Шәкил 21

квадрат үчхэдлисини елэ сечэк ки, $\varphi_k(x_{2k-2}) = y_{2k-2}$, $\varphi_k(x_{2k-1}) = y_{2k-1}$, $\varphi_k(x_{2k}) = y_{2k}$ олсун, a_k , b_k , c_k -лэр тэ'жин едилэрсэ, (1) үчхэдлиси мүүжэн олар.

Бу эмсаллар

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2}, \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1}, \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}$$

системиндэн тэ'жин едилир. Доғрудан да системин эмсалларын дан дүзэлмиш детерминант Вандер Монд* детерминанты олдуғу үчүн сыфырдан фэрглиндир:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{2k-2}^2 & x_{2k-2} & 1 \\ x_{2k-1}^2 & x_{2k-1} & 1 \\ x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \end{vmatrix}$$

Демэли, (2) системиндэн, a_k , b_k , c_k эмсаллары-жеканэ оларга тэ'жин едилир. Бунунла да (1) үчхэдлисинин тамамилэ мүүжэн олдуғу көстэрилиз.

$\varphi_k(x)$ квадрат үчхэдлисинин варлыгындан

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (a_k x^2 + b_k x + c_k) dx$$

олар. Саг тэрэфдэки интегралы несабляж:

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \varphi_k(x) dx &= \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (a_k x^2 + b_k x + c_k) dx = a_k \frac{x_{2k}^3 - x_{2k-2}^3}{3} + \\ &+ b_k \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2} + c_k (x_{2k} - x_{2k-2}) \end{aligned}$$

вэ ја

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \varphi_k(x) dx &= \frac{x_{2k}^3 - x_{2k-2}^3}{6} [2a_k (x_{2k-2}^2 + x_{2k-2}x_{2k} + x_{2k}^2) + \\ &+ 3b_k (x_{2k-2} + x_{2k}) + 6c_k] = \frac{x_{2k}^3 - x_{2k-2}^3}{6} \left\{ (a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + \right. \\ &+ c_k) + 4 \left[a_k \left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} \right)^2 + b_k \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} + c_k \right] + \end{aligned}$$

* Александр Теофилем Вандер Монд (1735—1796) франсыз ријазијатчысыдыр.

$$\left. + (a_{\kappa} x_{2\kappa}^2 + b_{\kappa} x_{2\kappa} + c_{\kappa}) \right\} = \frac{x_{2\kappa} - x_{2\kappa-2}}{6} \times \\ \times \left[\varphi_{\kappa}(x_{2\kappa-2}) + 4\varphi_{\kappa}\left(\frac{x_{2\kappa-2} + x_{2\kappa}}{2}\right) + \varphi_{\kappa}(x_{2\kappa}) \right].$$

Дикер тэрэфдэн,

$$x_{2\kappa} - x_{2\kappa-2} = \frac{b-a}{n} \quad \text{вэ} \quad \frac{x_{2\kappa-2} + x_{2\kappa}}{2} = x_{2\kappa-1} \\ \varphi_{\kappa}(x_{2\kappa-2}) = y_{2\kappa-2}; \quad \varphi_{\kappa}(x_{2\kappa-1}) = y_{2\kappa-1}; \quad \varphi_{\kappa}(x_{2\kappa}) = y_{2\kappa}$$

олдугундан

$$\int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} \varphi_{\kappa}(x) dx = \frac{b-a}{6n} (y_{2\kappa-2} + 4y_{2\kappa-1} + y_{2\kappa})$$

вэ

$$\int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2\kappa-2} + 4y_{2\kappa-1} + y_{2\kappa}) \quad (\kappa = \overline{1, n}).$$

Ахырынчылары чэмлэсэк

$$\sum_{\kappa=1}^n \int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{\kappa=1}^n (y_{2\kappa-2} + 4y_{2\kappa-1} + y_{2\kappa})$$

вэ ја

$$\sum_{\kappa=1}^n \int_{x_{2\kappa-2}}^{x_{2\kappa}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

олдугуну нэзэрэ алсаг,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{\kappa=1}^n (y_{2\kappa-2} + 4y_{2\kappa-1} + y_{2\kappa}) = \\ = \frac{b-a}{6n} \left(y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{\kappa=1}^n y_{2\kappa-1} + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} y_{2\kappa} \right).$$

Бу дүстур *Симпсон дүстуру* атланыр. Бурада хэтанын несабланмасы тамамилэ трапесијалар мегодунда олду, кимидир.

$f(x)$ -ин $[a, b]$ -тэ дөрдүнчү тәртиб кәсилмәз төрәмәсинән олдугуну фәрз етсәк,

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - S = - \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \cdot f^{(IV)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b). \quad \blacktriangleright$$

Мисал. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ интегралыны $n=2$ олдугда Симпсон

дүстуру илэ хесаблајын.

■ $n=2$ олдугда Симпсон дүстурундан аларыг кн,

x_0	0°	y_0	$\sin 0 = 0,0000$
x_1	$22^\circ 30'$	y_1	$\sin 22^\circ 30' = 0,3827$
x_2	45°	y_2	$\sin 45^\circ = 0,7071$
x_3	$67^\circ 30'$	y_3	$\sin 67^\circ 30' = 0,9239$
x_4	90°	y_4	$\sin 90^\circ = 1,0000$

$$y_0 + y_{2n} - y_0 - y_4 = 1,0000; \quad 4 \sum_{k=1}^n y_{k-1} = 4(y_1 + y_3) = 5,2264.$$

$$\frac{b-a}{6n} = \frac{\pi}{2 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{\pi}{24} = 0,1309; \quad 2 \sum_{k=1}^n y_{2k} = 2y_2 = 1,4142.$$

Беләликлэ, Симпсон дүстуруна әсасән

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \approx \frac{b-a}{n} \left(y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{k=1}^n y_{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} \right) =$$

$$= 0,1309(1,0000 + 5,2264 + 1,4142) = 1,0002.$$

Бурада хәта трапесијалар методундан чох аз олур. ■

Чалышмалар

Ашағыдакы интеграллары тәғриби хесаблајын.

1. $\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x}$ интегралыны дүзбучағлылар, трапесијалар вә параболлик дүстурларын һәр бири илэ 0,00001 дәғигликлэ тәғриби хесаблајын.

Чаваб: $J = 0,69284$; $J = 0,69377$; $J = 0,69315$.

2. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ интегралыны Симпсон дүстуру илэ 0,0001 дәғигликлэ хесаблајын вә бурахылан хәтаны гијмәтләндицин.

Чаваб: $J = 0,7468$; $|R| < 0,0001$.

3. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ интегралыны $n=5$ үчүн Симпсон дүстуру илэ 0,00001 дәғигликлэ хесаблајын вә бурахылан хәтаны гијмәтләндицин.

Чаваб: $J = 0,91597$; $|R| < 0,00001$.

IV ФӘСИЛ

МҮӘЛҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺӘНДӘСИ ТӘТБИГЛӘРИ

§ 1. МҮСТӘВИ ФИГУРУН САҢӘСИ

Мүстәви фигур [дедикдә, мүстәви үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари мәһдуд чохлуг нәзәрдә тутулур.

Бу мәгсәдлә E фигуруна дахил олан ихтијари чохбучаглы фигуру P илә, E -ни тамамилә өз дахилинә алан чохбучаглы фигуру исә Q илә ишарә едәк. Белә олдугда P вә Q фигурларына ујғун олараг дахилә вә харичә чәкилмиш фигурлар дејилир. Дахилә чәкилмиш чохбучаглы фигурларын саһәләри чохлугу $\{\mu(P)\}$ (әдәди чохлуг) јухарыдан мәһдуддур (мәсәлән, харичә чәкилмиш истәнилән чохбучаглынын саһәси илә). Аналожи олараг E фигурунун харичинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн чохбучаглы фигурларын саһәләри чохлугу $\{\mu(Q)\}$ ашағыдан (мәсәлән, 0 илә) мәһдуддур. Демәли, E фигурунун дахилинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чохбучаглыларын саһәләринин μ^* дәгиг јухары сәрһәди вә харичә чәкилмиш чохбучаглыларын μ_* дәгиг ашағы сәрһәди вар.

Јә'ни

$$\mu_* = \mu_*(E) = \sup_{P \subset E} \mu(P), \quad (1)$$

$$\mu^* = \mu^*(E) = \inf_{Q \supset E} \mu(Q). \quad (2)$$

μ_* вә μ^* -ја ујғун олараг E фигурунун ашағы вә јухары саһәләри дејилир. Дахилә чәкилмиш ихтијари фигурун саһәси харичә чәкилмиш фигурун саһәсиндән һәмишә бөјүк олмалығындан $\mu_*(E) \leq \mu^*(E)$ олар.

Ге [д. E фи урунун дхилинә леч бир чохбучаглы чөкмәк мүмкүн дејилсә, онда $\mu = 0$ гәбул едилир.

Тә'ри ф. E мүстәви фигурун јухары саһәси һәмин фигурун ашағы саһәси илә үст-үстә оушәрсә, јә'ни $\mu^* = \mu_*$ оларса, онда E фигуруна кәсратланан (саһәси олан) фигур дејилир.

Теорем 1. E фигурунун квадратланан олмасы үчүн зәрури нә кафи шәрт, ихтијари $\epsilon > 0$ көрә E фигурунун ујғун олараг харичинә вә дахилинә чәкилмиш елә Q вә P чохбучаглы фигурларынын олмасыдыр ки, онлар үчүн

$$\mu(Q) - \mu(P) < \epsilon \quad (3)$$

өдәнилсин.

◀ Шәрт зәруридир. Јә'ни E фигурунун квадратланан олдугуну фәрз ед.б (3) шәртинин өдәниллијини кәстә-

рэк. Шэртэ көрә E фигуру квадратланандыр. Демәли, $\mu^* = \mu_*$ олар. (1) вә (2) дәгиг ашагы вә μ хары сәрһәдләрин тә'рифинә көрә ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә дахилә вә харичә чәкилмиш елә P, Q чохбучаглы фигурларыны тапмаг олар ки,

$$\mu_* - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leq \mu_*; \quad \mu^* \leq \mu(Q) < \mu^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

өдәнилсин. (4) вә $\mu^* = \mu_*$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ алынар. Беләликлә, шәртин зәрури олмасы исбат едилир.

Шэрт кафидир. Јә'ни (3) шәрти өдәнилисә, E мүстәви фигурунун квадратланан олдуғуну көсгәрмәк ләзымдыр. Тутаг ки, $\forall \varepsilon > 0$ үчүн елә Q вә P фигурлары тапмаг мүмкүндүр ки, (3) шәрти өдәнилиз. Дикәр тәрәфдән,

$$\mu(P) \leq \mu_* \leq \mu^* < \mu(Q)$$

олдуғундан, (4) вә (5)-дән $0 \leq \mu^* - \mu_* \leq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ алынар. $\varepsilon > 0$ ихтијари олдуғу үчүн $0 \leq \mu^* - \mu_* < \varepsilon$ шәртиндән $\mu^* = \mu_*$ олар.

Демәли, E фигуру квадратланандыр. ►

Теорем 2. *E фигурунун квадратланан олмасы үчүн зәрури вә кафи шэрт ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә E фигурунун ујғун олараг харичинә вә дахилинә чәкилмиш елә Q вә P квадратланан мүстәви фигурларынын олмасыдыр ки, онлар үчүн*

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$$

шәрти өдәнилсин.

◄ Шәртин зәрурилији E фигуру квадратланандыр. Онда теорем 1-ә көрә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә Q вә P чохбучаглылары тапмаг олар ки, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ олар. Q вә P чохбучаглы олдуғуна көрә квадратланандыр. Демәли, шәртин зәрури олмасы исбат олунур.

Шәртин кафилији. Јә'ни истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн теоремин шәртини өдәјән елә квадратланан P вә Q фигурларыны тапмаг олар ки,

$$\mu(Q) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (6)$$

шәрти өдәнилиз. Шэртә көрә Q вә P квадратланан мүстәви фигурларыдыр. Онда Q -нү өз дахилинә алан елә \tilde{Q} чохбучаглысы вә P -нин дахилинә јерләшән елә \tilde{P} чохбучаглысы тапмаг олар ки,

$$\mu(\tilde{Q}) - \mu(Q) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mu(P) - \mu(\tilde{P}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (7)$$

олсун. (6) вә (7)-дән $\mu(\tilde{Q}) - \mu(\tilde{P}) < \varepsilon$ олдуғу алынар. Чох-

бучаглы \tilde{Q} мүстәви фигуру E -ни дахилинә алдығындан вә чохбучаглы \tilde{P} мүстәви фигуру E -я дахил олдуғундан бундан габагкы теоремә әсасән E фигуру квадратланандыр.

1. Әјрихәтли трапесијанын сәһәси

Јухарыдан $[a, b]$ парчасында тәјин едилмиш мәнфи олмајан кәсимләз $y = f(x)$ әјрисин илә, јанлардан Ox охуна перпендикулјар икн $x = a$, $x = b$ дүз хәтләри илә, ашағыдан исә Ox оху үзәриндә јерләшмиш $[a; b]$ парчасы илә әһатә олунмуш фигура әјрихәтли трапесија дејиләр (шәкил 22).

Теорем 3. Әјрихәтли трапесија квадратланан фигур олмагла сәһәси,

$$\mu(E) = \int_a^b f(x) dx$$

дүстуру илә тәјин едиләр.

◀ Шәртә көрә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында тәјин олунмуш мәнфи олмајан кәсимләз функцијатыр. Демәли, бу функција һәмин парчада интегралланандыр. Онда, истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн $[a, b]$ парчасынын елә $\{x_k\}$ бөлкүсүнү тапмаг олар ки,

$$S - s < \varepsilon$$

шәрти өтәниләр. Бурада S вә s кәстәрилән бөлкүјә ујғун јухары вә ашағы Дарбу чәмләридир.

Шәкилдән көрүндүјү ки, $S = \mu(Q)$ вә $s = \mu(P)$ (бурада Q әјрихәтли трапесијаны дахилинә алан, P исә онун дахилиндә јерләшән чохбучаглыдыр). Демәли,

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$$

олур. Бу исә әјрихәтли трапесијанын квадратланан олмасы үчүн һәм зәрури вә һәм дә кафидир. Ашкардыр ки, $s \leq \mu(E) \leq S$ вә $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ -дә интегралланан олдуғундан

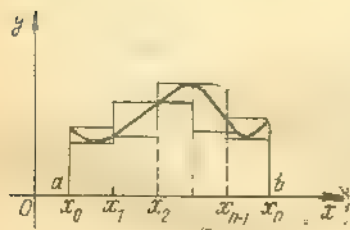
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S - s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx.$$

Бурада $\lambda = \max \Delta x_k$.

Гәјд. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсимләз вә мәнфи олдуғда буна ујғун фигурун сәһәси

$$= \int_a^b f(x) dx$$

олар.

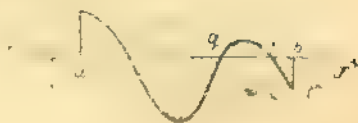


Шәкил 22

Функција парча дахилиндэ өз ишарасини дэжисэрсэ (шэкил 23)

$$S = \left| \int_a^p f(x) dx \right| + \left| \int_p^q f(x) dx \right| + \left| \int_q^r f(x) dx \right| + \left| \int_r^b f(x) dx \right|$$

вэ ја



Шэкил 23

$$S = \int_a^p f(x) dx - \int_p^q f(x) dx - \int_q^r f(x) dx + \int_r^b f(x) dx.$$

Мисал. $[0, 2\pi]$ парчасында $y = \sin x$ эјрисн илэ вэ Ox оху илэ эһатэ олунмуш саһэни тапын (шэкил 24).

■ $[0, 2\pi]$ парчасыны $[0, \pi]$ вэ $[\pi, 2\pi]$ кими ики парчаја бөлөк. $[0, \pi]$ парчасында $\sin x \geq 0$ вэ $[\pi, 2\pi]$ парчасында $\sin x < 0$ олдуғундан

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} -$$

$$-(-\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi}) = 2 + 2 = 4 \text{ кв. ваһид.} \quad \blacksquare$$

Ашагыда көстөрилэн салэ һаллар үчүн саһэлэрин һесабыланмасы охучуја тапшырылып.

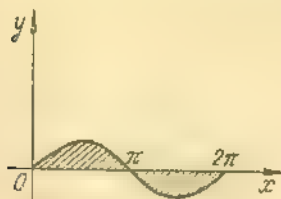
а) Ики эјри арасында јерлөшөн саһэнин һесабыланмасы. $[a, b]$ парчасында тэјин олунмуш

$$y = f_1(x); y = f_2(x); (f_1(x) \leq f_2(x))$$

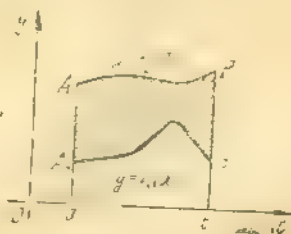
кәсылмәз функцијалары вэ $x = a$, $x = b$ дүз хәтлэри арасында галан фигурун саһәси

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

дүстуру илэ тәјин едилир (шэкил 25).



Шэкил 24



Шэкил 25

б) Параметрик шәкилдә верилмиш әјри васитәсилә әһатә олунмуш мүстәви фигурун сәһәси.

Әјри тәнлији $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) шәклиндә вериләрсә вә $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцијаларынын кәсилмәз төрәмәләри варса бу һалда сәһә,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

вә ја

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xy'_t - yx'_t) dt$$

дүстуру илә һесабланыр.

2. Әјри тәнлији полјар координат системиндә верилдикдә сәһәнин тәјјини

Фәрз едәк ки, L әјрисинин тәнлији $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз вә һәм дә мәғфи олмајан $\rho = \rho(\theta)$ шәклиндә верилир.

Тә'риф. L әјриси вә полјар ох илә α вә β бугағы әмәлә кәтирән ики радиус векторла әһатә олунмуш мүстәви фигура әјрихәтли сектор дејилир.

Теорем 2. *Әјрихәтли сектор квадратланан фигурдур вә онун сәһәси*

$$S = \mu(E) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

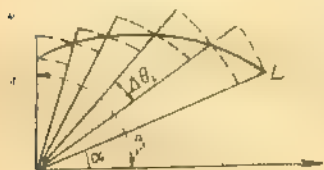
дүстуру илә һесабланыр (шәкил 26).

◀ Бу мәғсәдлә $[\alpha, \beta]$ парчасыны ихтијари җајда илә

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{k-1} < \theta_k < \dots < \theta_n = \beta$$

кими n һиссәјә бөләк вә һәр бир хүсуси $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ парчасы үчүн даирәви секторлар гураг.

$[\theta_{k-1}, \theta_k]$ парчасында верилмиш функцијанын ән кичик вә ән бөјүк гијмәтини ујғун олараг r_k вә R_k илә ишарә едиб даирәви секторлар чәкәк. Бу җајда илә квадратланан ики фигур алынар. Бу фигурлардан бири A әјрихәтли сектору даһилиндә јерләшән, диқәри исә бу сектору өз даһилинә алан B фигурдур. Бу фигурларын сәһәләри ујғун олараг



Шәкил 26

$$s = \mu(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta\theta_k,$$

$$S = \mu(B) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k^2 \Delta \theta_k$$

олар.

(Бурада $\Delta \theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ -дир). Бу чөмләрнн һәр бири $\frac{1}{2} \rho^2(\theta)$ функцијасы үчүн һәмнн бөлкүјә ујгун Дарбу чөмләридир. $\frac{1}{2} \rho^2(\theta)$ функцијасы $[\alpha, \beta]$ -да кәсиммәз олдуғундан интегралланандыр. Белә олдуғда истаһилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\{\theta_k\}$ бөлкүсү таппаг олар ки, бунун үчүн

$$S - s = \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon.$$

Дикәр тәрәфдән A вә B квадратланан олдуғундан вә бунлардан бири әрихәтли секторун даһилиндә јерләшдијиндән, дикәри исә бу сектору өз даһилиндә сахладығындан теорем 2-јә әсасән әрихәтли сектор квадратланандыр.

$$s = \mu(A) \leq \mu(E) \leq \mu(B) \leq S$$

олдуғундан,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta,$$

$$\mu(E) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta. \quad \blacktriangleright$$

Саһә һесаблинамасына айд бир нечә мисал.

Мисал 1. Еллипсин саһәсини тапын.

■ Еллипс координат охларына көрә симметрик олдуғундан әввәлчә онун координат буцагларынын бириндә јерләшән һиссәсинин саһәсини һесаблајыб сонра 4-ә вурмаг ләзимдыр (шәкил 27). Еллипсин кононик тәнлији

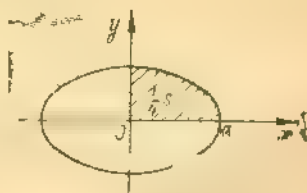
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

шәклиндә ифадә едилдијиндән,

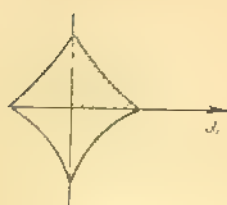
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\frac{1}{4} S = \int_0^a y dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

$$S = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$



Шәкил 27



Шәкил 28

$$-\frac{4b}{a} \cdot \frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a$$

$$= \frac{4a^2b}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ кв. вәһид.} \quad \blacksquare$$

Хүсуси һалда $b = a = R$ оларса, $S = \pi R^2$ кв. вәһид дәирәнин сәһәсидир.

Мисал 2. $x = R \cos^3 t$; $y = R \sin^3 t$. Бу, астрондин параметрик тәһлијидир. Һәмһин фигурун сәһәсини тапмалы (шәкил 28).

Астронд координат охларына көрә симметрик олдуғундан онун биринчи квадратдакы сәһәсини һесаблајыб 4-ә вурмаг лазымдыр. Ахтарылан сәһәнин дифференциалы

$$dS = y dx \text{ вә } S = \int_0^R y dx; \quad y = R \sin^3 t$$

$$dx = -3R \sin t \cos^2 t dt$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$S = -4 \cdot 3R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t \cos^2 t dt = 12R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt =$$

$$= 12R^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right).$$

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
R	0

Ахырынчы интегралы һесабламаг үчүн

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt = \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1}{2k(2k-2) \cdots 2 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

интегралындан истифадә едәк.

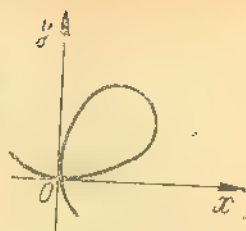
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32};$$

$$S = 12R^2 \left(\frac{3}{16} \pi - \frac{5}{32} \pi \right) = \frac{12\pi R^2}{32} = \frac{3}{8} \pi R^2. \quad \blacksquare$$

Мисал 3. Тәһлијя $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ шәклиндә олан Декарт јарпағынын гапалы һиссәсинин сәһәсини тапмалы.

■ Эриний тэнлигийн полжар координат системинд язаг (шэкил 29). Бү мэгсэдлэ $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ гэжлөг-мөсний апарат. Онда $\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta = 3a\rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta$ вэ бурадан

$$\rho = \frac{3a \sin \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$$



Шэкил 29

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta.$$

Ахырынчлал интегралы бөсблэмаг үчүн $\operatorname{tg} \theta = z$ гэвэз етсөк,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta = \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(1+z)^2} = \frac{1}{3}.$$

Белэллэлэ, ахтарыглан саһа $S = \frac{9a^2}{6} = 1.5a^2$ кв. ванлд олур. ■

§ 2. ЧИСМИН БӨЧМИНИН ТӨЛНИ

Фэзада бүтүн нөгтөлөр чохлуугуу көтүрөк вэ бунлардан бирини A илэ ишарэ едөк.

Тэ'ригф 1. Мэргэзи A нөгтөснөө вэ радиусу $\epsilon > 0$ олан күрэний дахилинөө жерлэшэн фэза нөгтөлөри чохлууга A нөгтөснийн ϵ этрафы бежилир.

Тэ'ригф 2. A нөгтөснийн $\epsilon > 0$ (ϵ ихтижари мүсбэт кичик эдөөлүр) этрафы тамачилэ чохлуугун дахилинөө (харичиндэ) жерлэшэрсэ, о һалла A нөгтөснээ һэмин чохлуугун дахилин (харичи) нөгтөсн бежилир.

Тэ'ригф 3. B нөгтөснийн истэннэлэн этрафында һэм чохлууга дахил олан, һэм оо чохлууга дахил олмажан нөгтөлөр оларса, онда B нөгтөснээ һэмин чохлуугун сэрһөө нөгтөсн бежилир.

Тэ'ригф 3'. Сэрһөө нөгтөлөри чохлууга бу чохлуугун сэрһөөн бежилир.

Тэ'ригф 4. Фэзанын $\{M\}$ нөгтөлөр чохлуугу тамачилэ мүгүжэн бир күрэний дахилинөө жерлэшэрсэ, о һалла бу чохлууга мөһдүл чохлууг вэ ја чисим бежилир.

Үчөтүлү фэзада гапалы област верилдигийн фэрз едөк. Башга сөзлө, мөһдүл гапалы (бир вэ ја бир нечэ) сэтһлэ һүдүдланмыш ихтижари формалы V чисминэ бахаг. V чисминин дахилиндэ жерлэшэн вэ һэмин чисми өз дахилинэ алан ихтижари мүмкүн олан чохүзлүнү уйгун олараг A вэ B илэ ишарэ едөк.

Саһадә олдуғу кими дахилә чәкилмиш бүтүн мүмкүн чоҳүзлү чисимләрин һәчмләри чоҳлугу $\{\mu(A)\}$ (әдәди чоҳлуг) јухарыдан (мәсәлән, хариҷә чәкилмиш истәнилән чоҳүзлүнүн һәчми илә) мәһдуддур. Аналожи олараг V чисминин хариҷинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чоҳүзлүләрин һәчмләри чоҳлугу $\{\mu(B)\}$ ашағыдан (мәсәлән, 0 илә) мәһдуддур. Демәли, V чисминин дахилинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чоҳүзлү чисимләрин һәчмләринин дәғиг ашағы сәрһәдди вар.

Тә'риф 5. V чисминин дахилинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чоҳүзлү чисимләрин һәчмләринин дәғиг јухары сәрһәдинә V чисминин ашағы һәчми вә аналожи олараг чисмин хариҷинә чәкилмиш бүтүн мүмкүн олан чоҳүзлү чисимләрин һәчмләринин дәғиг ашағы сәрһәдинә V чисминин јухары һәчми дејилир вә ујғун олараг, белә ишарә олунур:

$$\mu_* = \mu_*(V) = \sup_{A \subset V} \mu(A)$$

$$\mu^* = \mu^*(V) = \inf_{B \supset V} \mu(B)$$

Бу тә'рифдән $\mu_* \leq \mu^*$ олмасы ашкартыр.

Тә'риф 6. $\mu_* = \mu^*$ оларса, V -јә кубланан (вә ја һәчмә малик олан) чисим дејилир.

§ 1-дә исбат едилән теорем 1-ә аналожи теорем бурада да сөйләмәк олар.

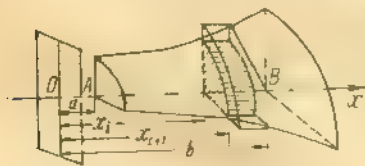
Теорем. V чисминин кубланан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, ихтијари $\epsilon > 0$ көрә V чисминин ујғун олараг хариҷинә вә дахилинә чәкилмиш елә B вә A чоҳүзлү чисимләринин олмасыдыр ки, онлар үчүн, $\mu(B) - \mu(A) < \epsilon$ өдәнилсин.

1. Чисмин ен кәсији верилдикдә һәчминин тә'јини

Ғапалы сәтһ илә һүдудланмыш чисмин верилдијини фәрз едәк. Бу чисми Ox охуна перпендикулјар мүстәви илә кәссәк, мүәјјән фигур алынар. Бу фигурун S саһәси үмумијәтлә, чари мүстәвинин вәзијәтиндән, башга сөзлә десәк, чари мүстәвинин Ox оху илә кәсишдији нөгтәнин абсисиндән асылыдыр, јә'ни $S = S(x)$. Инди исә бу чисмин һәчминин тапылмасы илә мәш-

ғул олаг. Бунун үчүн чисми $x = a$, $x = b$ мүстәвиләри илә Ox охуна перпендикулјар олараг кәсәк вә бу кәсикләр арасындакы чисмин һиссәсинин һәчмини тә'јин едәк (шәкил 30).

Бурада алынған фигурун анчаг бир ғапалы әјри илә әһатә



Шәкил 30

олундугу вэ бунун $S(x)$ ен кэсији саһәсинин мә'лум олдугу нәзәрдә тутулур. Ахтарылан һәчми тә'јин етмәк үчүн $[a, b]$ парчасыны ихтијари гәјдә илә n һиссәјә бөләк:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$S(x)$ фунһсијасынын һәмип парчада кәсимләз олдугуну фәрз едәк. Һәр бир бөлкү нөгтәсиндән Ox охуна перпендикулар мүстәвиләр кечирәк. Белә олдугда чисим бу паралел мүстәвиләр васитәсилә золағлара бөлүнүр. x_{k-1} вә x_k нөгтәлериндән кечән мүстәвиләрлә әһатә олунмуш елементар золағы ΔV_k илә ишарә едәк.

$S(x)$ функцијасы $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында кәсимләз олдугундан Вејерштрасын икинчи теореминә әсасән һәмип парчада өзүнүн ән бөјүк M_k вә ән кичик m_k гијмәтләринни алыр.

Бу парчада мүхтәлиф кәсикләр бир мүстәви үзәриндә јерләшәрсә, бунларын һамысы бизим фәрзијјәмизә кәрә саһәси M_k олан ән бөјүк кәсијин дахилиндә јерләшир. Ашкардыр ки, бу кәсик һәм дә саһәси m_k олан ән кичик кәсији өз дахилиндә сахлајыр. Ән бөјүк вә ән кичик кәсикләрлә һүндүрлүјү $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ олан цилиндрләр гураг. Бунлардан ән бөјүјү Δx_k золағыны өз дахилиндә сахлајыр, ән кичији исә бу золағын дахилиндә јерләшир.

Бу цилиндрләрин һәчмләри ујғун олараг $M_k \Delta x_k$ вә $m_k \Delta x_k$ олар.

Беләликлә, һәчмләрин чәми ујғун олараг $\sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$, $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ олар вә $\Delta x_k \rightarrow 0$ олдугда бунларын лимити бәрәбәр олмағла

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (1)$$

ахтарылан чисмин һәчми олур.

Нәтичә. Верилмиш чисми Ox охуна перпендикулар мүстәвиләрлә кәсдикдә алынан ен кәсикләрин саһәси мә'лум олдугда бу чисмин һәчми (1) дүсгуру илә ифадә олунур. Бурада S —ен кәсијин саһәси, x дәјишән нөгтәнин абсиси, a вә b исә чисмин кәнар кәсикләринин абсисидир.

Мисал. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ еллипсоидинин һәчмини тапын.

Еллипсоидин мәркәзиндән z мәсафәсиндә олан нөгтәдән кечән вә Ox охуна перпендикулар мүстәви илә кәсији еллипс олар.

Һәгигәтән, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ вә $\text{я} 1 - \frac{x^2}{a^2}$ ифадәсинә бөлмәклә алынган,

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \quad (2)$$

тәнлији еллипсин тәнлијидир. Бу еллипсин јарымохлары ујгун олараг

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{вә} \quad c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

олар.

Јарымохлары a вә b олан еллипсин саһәсинин πab олду-гуну нәзәрә алсаг, онда (2) еллипсинин саһәси,

$$S(x) = \pi bc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Беләликлә, ахтарышан һәчм

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{+a} S(x) dx = \frac{\pi bc}{a^2} \int_a^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{2\pi bc}{a^2} \left(a^2 x + \frac{1}{3} x^3 \right) = \frac{4}{3} \pi abc \text{ (ваһид)}^3. \end{aligned}$$

Хүсуси һалда, $a = b = c = R$ оларса, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ күрә һәчмидир. ■

2. Фырланмадан алынган чисмин һәчминин тә'јини.

Теорем. $y = f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәздирсә, онда $x = a$, $x = b$ дүз хәтләри, тәнлији $y = f(x)$ олан АВ әјрисини илә вә Ох оху илә әһәтә олунмуш әјрихәтли трапесијанын Ох оху әтрафында фырланмасындан алынган чисим кубланандыр вә онун һәчми

$$\mu(V) = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (3)$$

дүстуру илә тә'јин едилир.

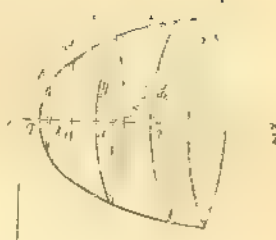
◀ Истәнилән $\{x_k\}$ бөлкүсү илә $[a, b]$ парчасыны кичик һиссәләрә бөләк. Һәр бир хүсуси $[x_{k-1}, x_k]$ һиссәсиндә $f(x)$ кәсилмәз олдуғундан Вејерштрасын икинчи теореминә сәһәһәм һәммин парчада өзүнүн ән бөјүк M_k вә ән кичик m_k гүјмәтини алыр.

Һәр бир кичик парчада һүнтүрлүкләри ујгун олараг m_k вә M_k олан ики дүзбучаглы гураг (шәкил 31). Нәтичәдә ики

пиллэvari фигур алынар. Бунлардан бири эрхэтли трапесианын дахилин-дэ јерлешир, дикәри исә эрхэтли трапесианы өз дахилинә алыр.

Эрхэтли трапесија вә бу пиллэvari фигурларын фырланмасындан V чисми вә ики пиллэvari чисим алынар. Бу чисимләрден бири V чисмини өз дахилинә алар, дикәри исә V чисминин дахилиндә јерлешәр.

Ујғун B вә A чисимләринин һәчм-ләри



Шәкил 31

$$\mu(B) = \pi \sum_{k=1}^n M_k^2 \Delta x_k; \quad \mu(A) = \pi \sum_{k=1}^n m_k^2 \Delta x_k \quad (4)$$

олар. (4) чәмләр $\pi f^2(x)$ функсијасы үчүн јуларын вә ашаты Дарбу чәмләринир. Бу функсија монотонлашкан олдуғунан $\mu(B) - \mu(A) = S$, $S < \epsilon$ олтар. Бу исә чәмләр кублала олдуғуну көстәрир. Дикәр тәрәфдән,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

олдуғуна көрә (3) дүстүру доғрудур.

Гејд 1. Эрхэтли трапесија Oy оху тарафында фырланмадан алынған чисмин һәчми

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Гејд 2. (3) дүстүрү (1) дүстүрүнүн хусуси јалыдыр. Бурада

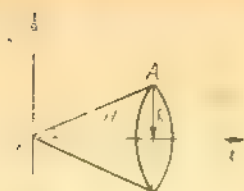
$$S(x) = \pi f^2(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Фырланмадан алынған чисмин һәчминин тапылмасына аид мисаллар

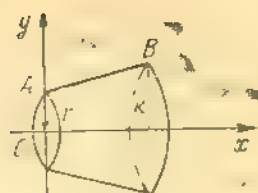
Мисал 1. Отурачаг радиусу R вә һүнчүрлүјү H олан конусун һәчмини тапмалы.

■ Конусун шәкилдә көстәрилән вәзијәтдә олдуғуну фәрз едәк. Оун һәчмини тапмаг үчүн әввәчә OA дүз хәттинин тәнлијини тапмаг лазымдыр. OA дүз хәтти координат башлангычыннан кечдијинә көрә онун тәнлијі $y = kx$ шәклиндә олар (шәкил 32).

Шәкилдән $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}$ вә нәтичәдә $y = \frac{R}{H}x$ олар. Онда



Шәкил 32



Шәкил 33

$$V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2 x^3}{H^2 \cdot 3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H \text{ (ваһид)}^3. \blacksquare$$

Мисал 2. Мәркәзи координат башлангычында вә радиусу R олан күрәниң һәҷмини тапмалы.

■ Күрә, ярымдаирәниң Ox оху әтрафында фырланма-сыдан алыныр. Бу һалда чеврә тәңлији $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ олар.

$$\text{Демәли, } V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \blacksquare$$

Мисал 3. Отурачаг радиустары r, R вә һүндүрлүҗү H олан кәсик конусуң һәҷмини тапың (шәкил 33).

■ AB дүз хәттиңиң тәңлирини җазаг. Бу дүз хәттә $A(0, r)$ вә $B(H, R)$ нөктәләриндән кечәйилә кәрә

$$\frac{y-r}{R-r} = \frac{x-0}{H-0}; \quad y = r + \frac{R-r}{H} x$$

олар.

$$V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H \left(r + \frac{R-r}{H} x \right)^2 dx = \pi \int_0^H \left[r^2 + \frac{2r(R-r)}{H} x + \frac{(R-r)^2}{H^2} x^2 \right] dx = \frac{\pi H}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2). \blacksquare$$

§ 3. ӘҖРИ ГӨҖСҮНҮН ҮЗҮНЛҮҖҮ

1. Садә әҗри аңлаҗышы

Икн $\varphi(t)$ вә $\psi(t)$ функцијаларының $[a, b]$ парчасында кәснмәз олдуғуну фәрз етәк (t - параметрлар). x вә y әдәтләриндән дүзәлмиш (x, y) чүгләриниң һизами дүзүлүшүндән

алынан мустәви һиссәсинә баһар. Һәр бир (x, y) чүтү, мустәвинин нөгтәсини вә x, y әдәлләри бу нөгтәнин координатларыны ифадә едир. Аңагән, (x, y) нөгтәси $M(x, y)$ киһи язылыр.

$$x = \varphi(t); y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (1)$$

(1) тәғликләриндә t параметрына заман киһи бахыларса, онда (1) тәғликләри мустәвилә координатлары x вә y олан M нөгтәсинин һәр кәт таңуууы ифадә едәр. Јә'ни $\forall t \in [\alpha, \beta]$ гижмәтинә $\forall \varphi, \psi$ көтүрүлмүш $\{M\}$ нөгтәләр чохлауна (1) таңууу илә һәр кәт едән нөгтә ин изи киһи бахыла биләр.

Тә'риф 1. Координатлары (1) тәғлики илә тә'јин олуған $\{M\}$ нөгтәләр чохлауу вери тәрсә вә $[1, 3]$ парчасында кәтүрүлмүш t -нин мухтәлиф гижмәтинә $\{M\}$ чохлаууның мухтәлиф нөгтәси гаршы сојуларса, бу нөгтәләр чохлауна сәдә мустәви әјриси дејилир.

Сәдә мустәви әјрисини тәғликләп, $\{M\}$ нөгтәләр чохлауу t параметрының α вә β сәрһәд гижмәтигә үзгүн олан нөгтәләрә әјрисини сәрһәд нөгтәси дејиләр.

Тә'риф 2. Сәрһәд нөгтәләри үст-үстә оушән вә галаң нөгтәләри мухтәлиф олан икә сәдә әјрисиниң барлашмәсинә алынған әјрисә галаңы сәдә әјрис дејилир.

2. $C_{a,b}$ вә $C_{a,b}^k$ функциялар фазиләри һагга ала аңла јыш.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олуңмүш бүтүн кәсәлмәз функциялар чохлауу, $C_{a,b}$ вә $[a, b]$ -дә k -чы гәртий кәсәлмәз гәрмәјә мелик функциялар чохлауу $C_{a,b}^k$ илә ишәрә етәк.

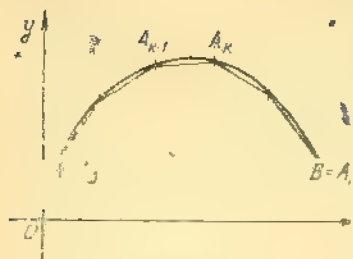
Тә'риф 3.

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta; \varphi(t), \psi(t) \in C_{a,b}^k$$

$$|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 > 0$$

оларса, (1) тәғликинн тә'јин етәңи әјрисә лаһар әјрис дејилир. Инни икә (1) тәғлики илә тә'јин олуған кәсәлмәз AB әјрисиниң гөвсүнүн узунлуғу аңтаңышыны верәк.

Бу мәсәлә $[1, 3]$ парчасыны истәвиләп таңа илә $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ аһмәт n һиссәгә бөләт. (Әјрисәт мусб гәсәлмәт тәғликләри аргмәт гәсәлмәти илә тә'јин етәләр.) Бу таңа илә бәлүнмүш һәр бир t_k нөгтәсинә гаршы әјрисә әрлә илә $A_k \in AB$ ($A_0 = A$, $A_n = B$) нөгтәси үзгүн олар. Әјрисә әзәриндә көтүрүлмүш A_k нөгтәләр инни ардычыл оларат A_{k-1}, A_k дүз хәтә парчалары илә барлашдырәк. Беләликлә, AB әјрисиниң x һагга чәһәлмәш сыныг хәттә алынар.



Шөкил 34

Бу сыныг хэттин узунлуғу $S_k = |A_{k-1} A_k|$ парчаларынын узунлуғу чөминэ барабардир (шөкил 34).

Иә'ни

$$l_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1} |A_{k-1} A_k|$$

олур.

Тә'риф 4. l_n узунлуғунун сонлу лимитинэ ($n \rightarrow \infty$) AB эјри гэвсүнүн узунлуғу дејилир вә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$$

ними ишарә едилир.

Бу һалда AB эјрисинэ оүзләнә билән эјри дејилир.

Теорем. $\varphi(t), \psi(t) \in C_{[\alpha, \beta]}$ оларса (1) эјриси $[\alpha, \beta]$ парчасында дүзләнән эјридир вә бу эјринин узунлуғу

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (2)$$

дүстүру илә тә'јин едилир.

◀ $A_k(x_k, y_k)$ ($k = 1, n$) нөгтәләринин координатларыны

$$x_k = \varphi(t_k), \quad y_k = \psi(t_k)$$

илә ишарә етәк. Онда

$$S_k = |A_{k-1} A_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2} \quad (3)$$

олур. Шәртә көрә $\varphi(t), \psi(t)$ функцијаларынын өзләри вә биринчи тәртиб төрәмәләри $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир. Демәли, бу функцијалар үчүн Лагранж теоремини тәтбиғ етсәк,

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}), \quad t_{k-1} < \tau_k < t_k, \quad (4)$$

$$\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}), \quad t_{k-1} < \tau_k < t_k.$$

$t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$ ишарә едиб алынан (4) гијмәтләрини (3)-дә нәзәрә алсағ,

$$S_k = |A_{k-1} A_k| = \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} \Delta t_k$$

вә

$$l_n = \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} \Delta t_k \quad (5)$$

ылынар. (5) барабарлијиндә биз τ'_k -и τ_k илә авәз етсәк

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} \Delta t_k$$

барабарлијини аларыг. Бу ахырынчы ифадә исә (2) интегралы үчүн интеграл чәми олдуғундан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (5_1)$$

олар. Инди көстәрәк ки, (5) барабарлијинин сағ тәрәфи дә мәһз бу лимитә јығылыр. Буну көстәрмәк үчүн $|I_n - \sigma|$, фәргини гијмәтләндирик:

$$|I_n - \sigma| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau'_k)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} \Delta t_k \right| \quad (6)$$

(6) барабарсизлијини гијмәтләндирмәк үчүн

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}| \leq |b - b_1|, \quad (6_1)$$

доғру олдуғуну көстәрәк. 1) $a=0$ олдуғда, барабарсизлик бидаваситә өтәнилик, 2) $a \neq 0$ олан һалда

$$\begin{aligned} & |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}| = \\ & = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2})(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2})}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} = \\ & = \frac{b^2 - b_1^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} (b - b_1), \\ & \left| \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} \right| \leq 1 \text{ олдуғуну нәзәрә алсаг,} \\ & \sqrt{a^2 + b_1^2} \leq |b - b_1|. \end{aligned}$$

(6₁) барабарсизлијини (6) барабарсизлијинин һәр бир һәдди үчүн тәтбиг етсәк,

$$|I_n - \sigma| \leq \sum_{k=1}^n |\psi(\tau'_k) - \psi(\tau_k)| \Delta t_k \quad (7)$$

олар. $\psi'(t)$, $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсимләз олдуғундан Кантор теореминә әсасән һәмин парчада мүнтәзәм кәсимләздир.

Јәни $\varepsilon > 0$ үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $\forall \tau'_k, \tau_k \in [\alpha, \beta]$ үчүн $|\tau'_k - \tau_k| < \delta$ олдуғда $|\psi(\tau'_k) - \psi(\tau_k)| < \varepsilon$ олар. Бу ахырынчыны (7) барабарсизлијиндә нәзәрә алсаг,

$$|L_n - \sigma| < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta t_k \quad \forall [a, L_n - \sigma] \leq \varepsilon (\beta - a)$$

вә нәһәјәт

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n - \sigma| = 0. \quad \blacktriangleright$$

3. Әјри тәнлијә дүзбұчағлы координат системиндә верилдикдә гөвсүн узунлуғу

Теорем. $y = f(x) \in C'[a, b]$ оларса, әјри гөвсүнүн узунлуғу

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

дүстуру илә тәјин едилир.

◀ Дүзбұчағлы координат системиндә верилдикдә $y = f(x)$ әјри тәнлијинә

$$\left. \begin{aligned} x &= x, \\ y &= f(x), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

($a \leq x \leq b$) параметрик шәкилдә һәм әјрини тәләји кими бұхмағ олар. (x параметрицир). $\frac{dx}{dx} = 1$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ олдуғуну (2) дүстуриндә тәзәрә алсағ,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Олар. \blacktriangleright

Гејд. Әјри тәнлији $x = g(y) \in C[c, d]$ ($c \leq y \leq d$) кими верилдәрсә һәм әјри гөвсүнүн узунлуғу

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

дүстуру илә тәјин едилир.

4. Әјри тәнлији полјар координат системиндә $\rho = \rho(\theta)$ ($\alpha < \theta \leq \beta$) кими верилдикдә гөвсүн узунлуғу

Әјрини полјар координат системиндә тәнлијә

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta = \rho(\theta) \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta = \rho(\theta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

олдугундан (9) тэнлигтнэ эривийн параметрик тэнлигн кими (θ параметр гэдг л едилир) бахмат олар. (9)-дан

$$dx = \cos \theta dp - p \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dp + p \cos \theta d\theta;$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \cos^2 \theta (dp)^2 - 2p \cos \theta \sin \theta dp d\theta + p^2 \sin^2 \theta (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (dp)^2 + 2p \sin \theta \cos \theta dp d\theta + p^2 \cos^2 \theta (d\theta)^2 = (dp)^2 + p^2 (d\theta)^2;$$

Бу гижмэглэри нэзэрэ алсар,

$$l = \int_a^b \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

4. Гөвсүн дифференциалы

AB мустэви эривийн тэнлигн $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) шэклиндэ верилэрсэ вэ $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C_{[a, \beta]}$ оларса, M нөйтэси эрив үзэрэ дэшилдикдэ AM гөвсүнүн узунлугу t параметриг дэн асылы $S = S(t)$ функциясы олачагтыр. (2) дүстуруна эсасэн

$$S(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2} du.$$

Лухары сэрхэдэ көрө төрөмүзлм теоремни тэтбиг етсэк,
 $\frac{dS}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ вэ $dS = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$.

Мисал 1. Радиусу R олан $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi)$ чеврэснийн узунлугуны тапмалы.

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \\ &= R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R. \end{aligned}$$

Мисал 2. $p = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) кардионд эривийн узунлугуны тапмалы.

$$\blacksquare \quad dl = \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2} d\theta; \quad \frac{dp}{d\theta} = -a \sin \theta;$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = a \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = \\ &= 2a \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} d\theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta, \end{aligned}$$

$$l = \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \int_\pi^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Гејд. $[0, \pi]$ парчасында $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ вә $\{\pi, 2\pi\}$ -дә $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ олдуғундан $[0, 2\pi]$ парчасы ики $[0, \pi]$ вә $[\pi, 2\pi]$ кими икисәјә бөлүнүшдүр. Демали,

$$l = 2a \cdot 2 \left[\left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] = 8a. \quad \blacksquare$$

§ 4. ФЫРЛАНМА СӘТҺИНИН САҢӘСИ

Дүзбучаглы координат системиндә, дүзләнә билән AB әјрисинин тәнлији $y = f(x) \in C_{[a,b]}$ ($a \leq x \leq b$) олсун.

Бу әјринин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынған сәтһин саҗәсини һесаблајаг. Бу мәгсәдлә $[a, b]$ парчасында $\{x_k\}$ иктијари бөлкүсүнү апараг. Јәъни,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$$

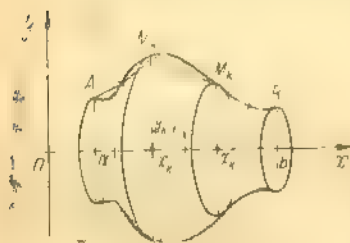
олсун. AB әјрисинин дахилинә чәкилмиш P_n сыныг хәттинин M_k тәпә нөгтәләринин координатларыны $(x_k, f(x_k))$ илә ишарә едәк. Бу сыныг хәттин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынған (кәсик конүсларын јан сәтһләринин саҗәләри чәми) сәтһин саҗәсини тәјий едәк. k -чы кәсик конусун отурачаглары, радиуслары ујғун олараг $f(x_{k-1})$ вә $f(x_k)$ олан чеврәләр олдуғундан M_{k-1} , M_k сыныг хәттинин фырланмасындан алынған кәсик конусун сәтһинин саҗәси

$$Q_k = 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} l_k$$

олар. Бүгүн сыныг хәтмәрин фырланмасындан алынған сәтһин саҗәси

$$Q_n = \sum_{k=1}^n Q_k = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} l_k$$

кимә ифадә едишәр. Бурада $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$ (шәкил 35), $\frac{1}{2} [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$ чәми, $f(x_{k-1})$ илә $f(x_k)$ гил-



Шәкил 35

мәтләри чрасында кәсәдлмәз функциянын гилмәги олдуғундан Кошинин икинчи теореминә әсасән елә $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нөгтәси вар ки, $f(\xi_k) = \frac{1}{2} [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$ олар.

Дикәр тәрәфдәл,

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

ифадәсини сәтәләшдирмәк мәгсәди илә, $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында

Лагранж теоремини тэтбиг етсэк,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})f'(\eta_k), \quad x_{k-1} < \eta_k < x_k$$

олдугуну аларыг. Онда

$$L_k = \sqrt{1 + [f'(\eta_k)]^2} (x_k - x_{k-1})$$

олар. Нэтнчэдэ исэ

$$Q_n = 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\eta_k)]^2} \Delta x_k \quad (1)$$

олар. ξ_k вэ η_k нөгтэлэри $[x_{k-1}, x_k]$ парчасында үмүмийэтлэ, мүхтәлиф олдугундан (1) ифадәси $f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясы үчүн интеграл чәми дејил. Лакин (1) ифадәси илэ

$$2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = \sigma \quad (2)$$

(2) интеграл чәми фәргинан лиматинин сыфыр олдугуну көс-тәрмәк олар.

Бунун үчүн

$$x_k - \sqrt{1 + [f'(\eta_k)]^2} - \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \quad (2_1)$$

ишарэ етсәк,

$$Q_n = 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \eta_k \Delta x_k \quad (3)$$

(3) бәрабәрлијини тийм тал нәрмәк үчүн

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c| \quad (4)$$

бәрабәрслијиндә истифадә етәк. (4) бәрабәрслијини (2)-дә нәзәрә алсаг

$$a_k \leq |f'(\eta_k) - f'(\xi_k)|$$

алыныр. Шәртгә көрә $f'(x)$ функциясы $[a, b]$ парчасында кө-сылмәз олдуғундан, Кошләр теореминә көрә һәмән парчада мүлгәзәм көсылмәзир. Јәни ихтијари $\varepsilon > 0$ көрә елә $\delta > 0$ вәр кә, $\forall \eta_k, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a, b] : |\eta_k - \xi_k| < \delta$ олдуғда

$$|f'(\eta_k) - f'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M(b-a)}, \quad (k = \overline{1, n})$$

өтәнилир. Јәни $a_k < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M(b-a)}$ олар. $(M = \max_{x \in [a, b]} f'(x))$. (3)

бәрабәрслијинин икинчи һәддәти тийм әтләндирәк.

$$\left| 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \alpha_k \Delta x_k \right| \leq 2\pi \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k \leq$$

$$\frac{2\pi M \cdot \varepsilon (b-a)}{2\pi M (b-a)} = \varepsilon$$

Демəли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \alpha_k \Delta x_k = 0$$

олур. Белəликле,

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

вə я

$$Q = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Гейд. Əлини тəнлији $x = \xi(y) \in C_{[c,d]}$ шаклинде ас, илэрэ бу əлрини Оу оху əтрафында сызыланмасынча эллипс сəтнин сəхəсин

$$Q = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy \text{ вə я } Q = 2\pi \int_c^d \xi(y) \sqrt{1 + [\xi'(y)]^2} dy.$$

Əли тəнлији параметрик шəкли: $x = \xi(t)$, $y = \psi(t)$ верилэрэ вə $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C_{[\alpha,\beta]}$ оларса, онда

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Мисал. Еллипсин Ох оху əтрафынча фəрланмасынча алынан сəтнин (элементин) сəхəсини тапын.

■ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ еллипс тəнлијиндən

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (|x| \leq a); \quad y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$Q = 2\pi \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^4 - b^4)x^2} dx.$$

$$u = x \sqrt{a^2 - b^2} \text{ эвэс етсэк } dx = \frac{du}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$Q = \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \int_a^{a \sqrt{a^2 - b^2}} a \sqrt{a^2 - u^2} du =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \left\{ \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} \right\} \Big|_a^{a \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \blacksquare$$

Гејд. $b \rightarrow a$ олду, да етилс дансэ олэр вэ фырланмэдэн алынан ел-
липсид күрэрэ төврилэр. Нэтигэдэ, $Q = 4\pi a^2$ күрэ сэтхиини сагэси алынар.

1. Саһэлэрин һесаблианмасына анд мәсэлэлэр

1. Абсис оху, $y = x^3 - 3x^2 - 3x$ эјрисн вэ $x = 3$ дүз хэтти
илэ һүдудланмыш саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = 6,75$ кв. в.

2. $y^2(x^2 - 4) = 100$ эјр с илэ $y = 4$ дүз хэтти арасында
галан саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = (20 \ln 2 - 12)$ кв. в.

3. $y = 4 \ln x$ вэ $x^2 = 4a$ у параболалары арасында галан са-
һэни һесаблајын.

Чаваб: $S = \frac{16}{3} a^2$ кв. в.

4. $y = \frac{1}{1+x^2}$ вэ $y = \frac{x^2}{2}$ эјрилэр с илэ x һатэ олдумыш саһэни
һесаблајын.

Чаваб: $S = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right)$ кв. в.

5. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ Лемнискат эјрисн илэ эһатэ олду-
мыш саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = a^2$ кв. в.

6. $y = 2x$, $x = 5$ вэ $y = 0$ дүз хэтлэри илэ һүдудланмыш
саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = 25$ кв. в.

7. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ эјрисн илэ вэ $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ дүз
хэтлэри илэ һүдудланмыш саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = \frac{a^2}{2e} (e^2 - 1)$ кв. в.

8. $y = \ln x$, $x = a$ вэ $x = 2a$ ($a > 0$) хэтлэри илэ һүдудланмыш саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = a \ln \frac{4a}{e}$ кв. в.

9. Паскал илбизч адланан $\rho = 2a(2 + \cos \theta)$ эјрис илэ һүдудланмыш саһэни һесаблајын.

Чаваб: $S = 18\pi a^2$ кв. в.

II. Һәчмлэрин вэ јан сәтһлэрин һесаблинамасына аид мәсәлэләр.

1. $y = \frac{b}{a}x$, $x = a$ вэ $y = 0$ хэтлэри илэ һүдудланмыш саһэнин Ox оху әтрафында ғырланмасындан алынған конусун һәчмини вэ јан сәтһинин саһэсини мүәјјән итеграл васитәсилә һесаблајын.

Чаваб: $V = \frac{1}{3}\pi ab^2$; $S = \pi b\sqrt{a^2 + b^2}$.

2. $x^2(y - b^2) = a^2$ чевраси илэ һүдудланмыш даирәнин өз оху әтрафында ғырланмасындан алынған фигурун һәчмини саһэсини һесаблајын.

Чаваб: $V = 2\pi^2 a^3 b$; $S = 4\pi^2 ab$

3. Координат охлары вэ $4x - 5y + 3 = 0$ дүз хәтти илэ һүдудланмыш үчбучағын Ox оху әтрафында ғырланмасын алынған конусун һәчмини вэ јан сәтһинин саһэсини һесаблималы.

Чаваб: $V = \frac{9}{100}\pi$, $S = \frac{9\sqrt{41}}{100}\pi$.

4. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ эңчләр хәттинин $x = 0$ вэ $x = a$ абсис нөггөләри арасында галан төвсүнүн Ox оху әтрафында ғырланмасындан алынған сәтһин саһэсини һесаблајын.

Чаваб: $S = \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4)$.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ еллипсинин 1) Ox оху вэ 2) Oy оху әтрафында ғырланмасындан алынған сәтһлэрин сәһмләрини һесаблајын.

Чаваб: 1) $S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2}{2} \arcsin e$,

2) $S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}$.

6. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ тсиклоидинин биринчи

гөвсүнүн 1) Ox оху этрафында, 2) Oy оху этрафында фырланмасындан алынган сәтһләрин сәһәсини һесаблајын.

$$\text{Чаваб: 1) } S = \frac{64}{3} \pi a^2,$$

$$2) S = 16\pi^2 a^2.$$

III. Әјри узунлуғунун һесаблинамасына аид мәсәләләр.

1. $ay^2 = x^3$ жарымкубик параболасынын координат башланғычындан $x = 5a$ абсисли нөгтәјә гәдәр гөвсүнүн узунлуғуну тапын.

$$\text{Чаваб: } l = \frac{335}{27} a.$$

2. $y = 1 - \ln \cos x$ әјрисинин $x = 0$ абсисли нөгтәсиндән $x = \frac{\pi}{4}$ абсисли нөгтәсинә гәдәр олан узунлуғуну тапын.

$$\text{Чаваб: } l = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

3. $y^2 = x^4$ әјрисинин $(0; 0)$ нөгтәсиндән $(4, 8)$ нөгтәсинә гәдәр гөвсүнүн узунлуғуну тапын.

$$\text{Чаваб: } l = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

4. Исбат едик, $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ еллипсинин узунлуғу $y = \sin x$ синусоидинин бир далғасыны узунлуғуна бәрабәрди.

5. $\rho = e^{\theta}$ логарифмик спиралынын полјус нөгтәсиндән (ρ, θ) нөгтәсинә гәдәр гөвсүнүн узунлуғуну тапын.

$$\text{Чаваб: } l = \frac{2}{a} \sqrt{a^2 - 1}.$$

6. $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ әјрисинин бүтүн узунлуғуну тапын.

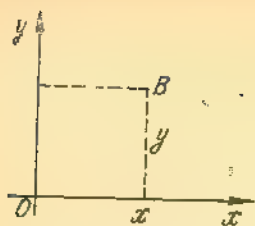
$$\text{Чаваб: } l = \frac{3}{2} \pi a.$$

У ФӘСИЛ

МҮӘЛҖӘН ИНТЕГРАЛЫН МЕХАНИКАҖА ТӘТБИГЛӘРИ

§ 1. СТАТИК МОМЕНТ ВӘ АҒЫРЛЫҖ МӘРКӘЗИ

Физикада вә механикада бир сыра мәсәләләрин һәлләри, ујғун интеграл чәмләринин дүзәлмәси вә онларын лимитләринин һесаблинамасына кәтирили.



Шәкил 36

Фәрз едәк ки, xOy координат системиндә күтләси m олан B мадди нөгтәси верилмишдир.

Механикадан билирик ки, һәр һансы мадди нөгтәсини l охуна нәзәрән статик моменти онун күтләсинин һәмийн нөгтәдән оха гәдәр олан мәсафәјә һасилнә бәрәбәрдир:

$$M_l = md,$$

бурада M статик момент, d исә нөгтәдән оха гәдәр олан мәсафәдәдир.

Тәрифдән ашкардыр ки, xOy системиндә күтүрүлмүш M мадди нөгтәсинин Ox вә Oy охлары а нәзәрән статик моментләри (шәкил 36)

$$M_x = my, \quad M_y = mx$$

олар. Мүстәви үзәриндә күтләсләри ујғун оларат m_1, m_2, \dots, m_n олан B_1, B_2, \dots, B_n мадди нөгтәләр системинин һәр һансы l охуна нәзәрән статик моменти

$$M_l = \sum_{i=1}^n m_i d_i$$

дүстуру илә һесаблинар. Бурада $d_i (i=1, n)$ ујғун оларат B_i ($i=1, n$) нөгтәләриндән l охуна гәдәр олан мәсафәләр-дир. $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), \dots, B_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтәләри xOy системиндә јерл. штирилмишдирсә, онда Ox вә Oy охуна нәзәрән бу системин статик моменти (шәкил 37)

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (1)$$

дүстурлары илә һесаблинар.

Јенә дә механикадан мә'лумдур ки, күтләләри ујғун оларат m_1, m_2, \dots, m_n олан n сәјдә $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), \dots, B_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтәләр системинин ағырлыг мәркәзинин x_c вә y_c координатлары

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (2)$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

дүстурлары илә һесаблинар. (2)-ни ашағыдакы кими дә јазә биләрик:



Шәкил 37

$$x_c(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n,$$

$$y_c(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n.$$

вэ ја

$$\left. \begin{aligned} x_c \sum_{i=1}^n m_i &= \sum_{i=1}^n m_i x_i, \\ y_c \sum_{i=1}^n m_i &= \sum_{i=1}^n m_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(1)-и (3)-дә нәзәрә асаг,

$$\left. \begin{aligned} M_y &= x_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i, \\ M_x &= y_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Беләлликлә, баз ашагынакы теорем исбат етмәш олдуг

Теорем. *Мадди нөгтәләр системинин һәр һансы оха нәзәрән статик моменти, системин ағырлыг мәркәзинин һәм ин оха нәзәрән статик моментинә бәрәбәрдир.*

§ 2. МҮСТӘВИ ӘЛРИСИНИН СТАТИК МОМЕНТИ ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИНИН ТАПЫЛМАСЫ

Мадди нөгтәләр мустәви үзәрнәдә сәпмәдмәш һалда ол-
мајыб мүүјјән хәтти үзәрә үзүлүшүсә, онда статик момен-
тин ифатәсә интеграл шәклидә көстөрилә биләр.

Әјринин ваһити үзүлүшүсә оған гөвсә үн күтәсәш *хәтти сыхлыг* дејилир вә ρ илә ишарә едилір.

Верилмәш мати әјри үчүрә сабыт олдуғда она *бирчын-
ли*, әкс һалда *бирчынли олмајан әјри* ејилір. Әјринин ағыр-
лыг мәркәзи статикдә сабыт галымыгә матик истәнилән гәдәр
назик бирчынли мәркәзини ағырлыг мәркәзи баша үшүлүр.

Фәрз едәк ки, бирчынли AB мати әјрисини xOy системин-
дә (шәкил 38) өзүнүн

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq s \leq S) \quad (1)$$

параметрик шәкилдә тәнлији (әјри
өзү исә дүзләнән һесап олунур) илә
верилмәш AB әјрисинин үзүлү-
гуну S илә ишарә едәк, $s \in [0, S]$.
(1) функцијасы $[0, S]$ парчасында
кәсәлмәз олдуғу фәрз олунур. Мадди



Шәкил 38

әйри бирчисини олдугу үчүгү онун еңи узунлуга малик истәнилән ики парчасынын күтлөсү бәрәбәр олар.

$[0, S]$ парчасыны истәнилән тајта илә ашағыдакы кими һиссәләрә бөләк:

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k-1} < s_k < \dots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Бу бөлкүжә ујғун олараг AB әјрисини $A_{k-1} A_k$ ($k = \overline{1, n}$) кими һиссәләрә бөлүнүр. Онда $A_k(x_k = x(s_k), y_k = y(s_k))$ ($k = \overline{1, n}$) олар. $A_{k-1} A_k$ гөвсүнүн узунлугуну $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$ илә ишарә етсәк, онда Δs_k гөвсүнүн күтлөсү $\Delta m_k = \rho \Delta s_k$ олар. Бу күтлөннин A_k нөгтәсиндә јерләшдијини фәрз етсәк, онда Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләр ујғун олараг

$$M_x^{(k)} = y_k \Delta m_k = y_k \rho \Delta s_k$$

$$M_y^{(k)} = x_k \Delta m_k = x_k \rho \Delta s_k$$

олар. Онда бүтүнлүкдә AB әјрисинин охлара нәзәрән статик моменти тәғрибән

$$M_x \approx \rho \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta s_k, \quad M_y \approx \rho \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta s_k \quad (2)$$

олар. (2) бәрәбәрлијинин дәгиг гижмәтини тапмаг үчүн $\lambda = \max \{\Delta s_k, > 0\}$ јакынлашдырыб ләмитә кечмәк ләзимдыр. Онда

$$M_x = \rho \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta s_k, \quad M_y = \rho \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta s_k$$

вә ја

$$M_x = \rho \int_0^S y ds, \quad M_y = \rho \int_0^S x ds. \quad (3)$$

Әкәр AB әјрисинин тәнлији $y = f(x)$ шәклиндә вериләрсә, онда билирик ки, $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ олар. A нөгтәсинин абсиси a вә B нөгтәсинин абсиси b олдуғуну нәзәрә алсаг, (3) бәрәбәрлији ашағыдакы кими олар:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \\ M_y &= \rho \int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Гејд 1. AB әјрисинин координат охларына нәзәрән әгаләт моментини

$J_x = \rho \int_a^b y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx$ вә $J_y = \rho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx$ дүстурлары илә һесабланыр.

AB эјрисинин тэнлијя

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T$$

параметрик шәкилдә вериләрсә вә $[t_0, T]$ парчасында $\varphi(t)$ вә $\psi(t)$ функциялары биргиләтли вә төрәмәләри илә бирликдә кәсилмәз функциялардырса, онда $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ олдуğunu нәзәрә алсаг

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \rho \int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \\ M_y &= \rho \int_{t_0}^T \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

аларыг.

AB мадди эјрисинин статик моменти үчүн јухарыда верилмиш дүстурлардан истифадә едәрк эјринин ағырлыг мәркәзинин координатлары үчүн дә дүстур чыхармаг олар. Бу дүстурлары чыхармаг үчүн механикадан мәлүм олан ашагыдакы принципдән истифадә едилир: эјринин ағырлыг мәркәзинә тәтбиг олунмуш эјри күтләсинин һәр һансы оха нәзәрән статик моменти, эјринин бүтүнлүкдә һәмин оха нәзәрән статик моментинә барабардир.

Эјринин узунлуғу S , сыхлыгы ρ , бүтүнлүкдә күтләси m вә ағырлыг мәркәзи $C(x_c, y_c)$ оларса, олда

$$S = \int_0^S ds, \quad m = \rho S = \rho \int_0^S ds$$

олар. Јухарыда сөјләнилән принципи нәзәрә алсаг

$$M_y = mx = \rho \int_0^S x ds, \quad M_x = my_c = \rho \int_0^S y ds \quad (6)$$

олар. (6) барабәрлијиндән исә

$$x_c = \frac{\int_0^S x ds}{\int_0^S ds}, \quad y_c = \frac{\int_0^S y ds}{\int_0^S ds} \quad (7)$$

олдуğunu аларыг.

AB эјрисинин тәнлијя $y = f(x)$ шәклиндә верилмиш оларса, онда (7) барабәрликләри

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx}$$

шаклинэ дүшэр.

Эјринин гәклији $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ параметрик шаклидә вериләрсә, (5)-дән истифадә етсәк,

$$x_c = \frac{\int_{t_0}^T \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}{\int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}; \quad y_c = \frac{\int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}{\int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt},$$

олар. (7) барабарлијини ишетиши дисуруну махрәндән гартарыб $2\pi \cdot J_{\text{эв}}^{\text{вурсаг}}$

$$2\pi y_c \int_0^S ds = 2\pi \int_0^S ds \quad (8)$$

олар. (8)-дә $S = \int_0^S ds$ олдуғуну чәзәрә алсаг

$$2\pi y_c \cdot S = 2\pi \int_0^S y ds$$

олар. Беләликлә, ан эвклидасы теореме исбат етмиш олдуғ.

Теорем. (Күлдинин биринчи теореме). Ох илә бир муствәи үзәриндә јерләшән вә бу ох илә кәсишмәјән эјринин ох атрафында фырланмасындан алынән сәт-кин саһәси, эјринин узунлуғу илә ағырлыг маркәзиниң чыздығы чеврә узунлуғунун һасилинә барабардир.

Гејд 2. АВ эјриси һәр яһсы илә хәттә нәзәрән симметрик оләрә, онда бу эјриниң ағырлыг маркәзи һәмин чүт хәттә үзәриндә јерләшәр.



Координат системини елз кәтәрәк ки, Оу оху һәмин дүз хәтлә үст-үстә дүшсүн (шәкил 39). Онда АВ эјрисиңә гаршы гојулан $f(x)$ функциясы чүт функция олар. (7)-дән ашкардыр ки,

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Шәкил 39

* Күлдин Паул (1577 - 1643) Исвәчрә риязијатчысыдыр.

Интегралалты функција төк функција олдугу үчүн

$$\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 0$$

олар. Онда алырыг ки, $x_c = 0$ дыр. Демэли, AB эллипсинин агырлыг мэркэзи, симметрия оху олан Oy оху үзэриндэ олар.

Мисал 1. $x^2 + y^2 = R^2$ чеврэсинин јухары јарымһиссэсинин агырлыг мэркэзини тапмалы.

■ Әјри Oy охуна нэзэрэн симметрик олдугу үчүн агырлыг мэркэзи Oy оху үзэриндэ олар вэ $x_c = 0$. y_c -ни тапмаг үчүн

$$y_c = \frac{1}{S} \int_{-R}^{+R} y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (9)$$

дүстурундан истифадэ едэчәјик.

$x^2 + y^2 = R^2$ гејри-ашкар функцијасыннан төрөмө алсаг,

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2}$$

олар. Сонунчу барабэрликләри (9)-да нэзэрэ алсаг,

$$y_c = \frac{1}{S} \int_{-R}^{+R} y \frac{R}{y} dx = \frac{2}{S} Rx \Big|_0^R = \frac{2R^2}{S}$$

барабэрлијини аларыг. $S = \pi R$ олдугу үчүн $y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$

олар. Беләликлэ, алдыг ки, јарымчеврэнин агырлыг мэркэзи $C(0, \frac{2R}{\pi})$ нөгтәсидир. ■

Гејд 3. Әјринин узунлугу вэ фырланмадан алынн сәтнин сәһәси мәлүм олрса, Күлдин теореминдән истифадэ едәрәк, агырлыг мэркэзинин координатларыны тапа биләрик.

Јарымчеврэнин Ox оху атрафында фырланмасыннан алынн сәтнин сәһәсинин $Q = 4\pi R^2$ вэ јарымчеврэнин узунлугунун $S = \pi R$ олдуғуну нэзәрэ алсаг,

$$x_c = \frac{4\pi R^2}{2\pi S} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{2R}{\pi}, \quad x_c = 0$$

олдуғуну аларыг.

Мисал 2. $y = \sin x$ синусоидинин (башлангычдан саг төрәфә) биринчи јарымдалгасынын охуна нэзэрэн статик моменти һесабламалы.

■ (4) дүстурун а $\rho = 1$ гәбул етсәк вэ

$$y' = \cos x, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

олдугуну (4)-дә нәзәрә алсаг,

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = - \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} d(\cos x) = \\ &= - \left[\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) \right]_0^{\pi} = \\ &= -\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

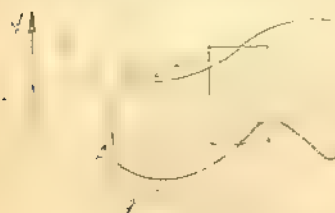
§ 3. МҮСТӘВИ ФИГУРҮН СТАТИК МОМЕНТИНИН ВӘ АҒЫРЛЫГ МӘРКӘЗИНИН ТӘҖИНИ

Мадди мүстәви һиссәсә һедәклә, сабит галышлыгы һазик лөвһә баша дүшмәҗик. Фәрз етек ки, бу һазик лөвһә бир-чинслидир.

Мадди лөвһә мүстәвинин $ABCD$ һиссәсиндә җерләшмеш оларса вә $ABCD$ фигурә ашагыдан вә јухагыдан үзгүчә олараг (шәкл 40) кәсәлмәз $y = f_1(x)$ вә $y = f_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) әҗриләри илә, јулардан һисә $x = a$ вә $x = b$ дүз хәтләри илә һәтә олмушдурса, бу мадди мүстәви фигурә охләри нәзәрән статик моментләрини һесаплајаг.

Бу мәсәллә $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ нөггәләри вәсигәсәлә $[a, b]$ парчасының дүҗијри гәҗтә илә һиссәләтә бөлә вә $i = \max \{x_1, \dots, x_n\}$ илә ишарә етек. Беләликлә, $ABCD$ мадди мүстәви һиссәсә n сәдәк золағ-лара бөлмүш олдуғ.

$f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функцијалары $[a, b]$ парчасында кәсәлмәз олдуғу үчүн $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, n-1$) (парчаларында) бу функцијаларының гәҗмәгләри бәри тәкәриндән чытти фәргләтмәз. $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ функцијаларының $[x_i, x_{i+1}]$ парчасындагы гәҗмәтләрини мөәјјән хәтә илә $f_1(\xi_i)$ вә $f_2(\xi_i)$ әдәлләри илә әвәз етмәк олар. Башга сөзлә, бу одемәкдир ки, мадди $ABCD$ мүстәви һиссәсини пилләвари дүзбучаглыларла әвәз етмәш олдуғ. Беләликлә, i -чы золағы отурачагы Δx_i , һүндүрлүјү $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ -јә бәрабәр отан дүзбучаглы илә әвәз етмиш олдуғ.



i -чи дүзбучаглының саһәси $[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i$, күтләси исә $m_i = \rho [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i$ олар.

Механикадан мәлүмдур ки, дүзбучаглының ағырлыг мәркәзи, оңун диагоналларының кәсишмә нөггәсидир. i -чи дүзбучаглының диагоналларының кәсишмә нөггәсинин координатлары ξ_i вә

$\frac{1}{2} [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]$ олар. Фэрз етсәк ки, i -чи дүзбучаглынын бүтүн күтәсәи һәмни дүзбучаглынын ағырлыг мәркәзинә тәт-биг олунуб, онда бу дүзбучаглынын Ox вә Oy охларына нә-зәрән статик моментләри

$$\begin{aligned} \rho [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \cdot \frac{1}{2} [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] = \\ = \frac{\rho}{2} [f_2^2(\xi_i) - f_1^2(\xi_i)] \Delta x_i; \\ \rho [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \xi_i \Delta x_i \end{aligned}$$

олар. Бүтүн дүзбучаглылар үзрә тапылмыш статик момент-ләри чәмләсәк, $ABCD$ мадди мүстәви һиссәсинин Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләри үчүн ашағыдакы тәг-риби дүстурлары алмыш оларыг:

$$\begin{aligned} M_x &\approx \frac{\rho}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f_2^2(\xi_i) - f_1^2(\xi_i)] \Delta x_i; \\ M_y &\approx \rho \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) тәгриби бәрәбәрликләриндә $\lambda \rightarrow 0$ олмагада лимитә кеч-сәк M_x вә M_y үчүн дәгиг бәрәбәрлик алмыш оларыг. Јә'ни

$$M_x = \frac{\rho}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f_2^2(\xi_i) - f_1^2(\xi_i)] \Delta x_i, \quad (2)$$

$$M_y = \rho \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i. \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f_2^2(\xi_i) - f_1^2(\xi_i)] \Delta x_i \quad \text{вә} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i$$

чәмләри, $[a, b]$ парчасында кәсилмәз $[f_2'(x) - f_1'(x)]$ вә $x[f_2(x) - f_1(x)]$ функцијаларынын интеграл чәмләри олтугу үчүн (2) вә (3) лимитләри вар вә бу лимитләр

$$\frac{\rho}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \quad \rho \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] dx$$

интегралларына бәрәбәрдыр. Онда

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \quad (4)$$

$$M_y = \rho \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (5)$$

олар. Инди исә $ABCD$ мадди мүстәви һиссәсинин ағырлыг мәркәзи олан $C(x_c, y_c)$ нөгтәсини тапаг. Ашкардыр ки, $ABCD$ фигурунун күтләси

$$m = \rho \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx = \rho P$$

олар. Бурада P $ABCD$ фигурунун саһәсидир. Билирик ки, ағырлыг мәркәзинин координатлары, уҗуи статик моментин күтләҗә һисбәтинә бәрәбәрдир. Онда

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{P} \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad (6)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2P} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \quad (7)$$

олар.

Хүсуи һалда $f(x)$ әјриси $[a, b]$ парчасы үзәринә дүшәрсә, (6) вә (7) дүстурлары ашагыдакы камн олар:

$$x_c = \frac{1}{P} \int_a^b xy dx, \quad y_c = \frac{1}{2P} \int_a^b y^2 dx.$$

(7) бәрәбәрлијини π эдәдинә вуруб мәхрәчдән гуртарсаг

$$2\pi y_c \cdot P = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \quad (8)$$

олар.

(8) бәрәбәрлијини саг тәрәфи, ашагыдан вә ј, харыдан уҗуи олараг $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ әјриләри илә әһатә олмуш $ABCD$ әјрихәтли трапесијасынын Ox оху әтрафында җырланмасын-дан алынал чәсмин һәчмидир. Онда (8) бәрәбәрлијини

$$V = P \cdot 2\pi y_c$$

кими јаза биләрик.

Гејд 1. $f(x)$ әјриси $[a, b]$ парчасы илә үст-үстә дүшәрсә, онда $ABCD$ әјрихәтли трапесијасынын координат охларына нәзәрән әталәт моменти

$$J_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b f^3(x) |f(x)| dx \quad \text{вә} \quad J_y = \rho \int_a^b x^2 |f(x)| dx$$

дүстурлары илә һесаблинар.

Теорем. (Күлдинин икинчи теорем). *Мүстәви фигурун, бу фигуру кәсмәјән Ох оху әтрафында җырланмасындан алынган чисмин һәмми мүстәви фигурун саһәси илә онун ағырлыг мәркәзинин җызмы и олодугу җеврәнин узунлуғу һасилинә бәрәбәрди.*

Гејд 2. $ABCD$ әјрихәтли трапесијасы, $x_1 = \varphi_1(y)$ вә $x_2 = \varphi_2(y)$ әјрихәтлери, $y = c$, $y = d$ дүз хәтләри илә әһәтә едилмиш оларса, онда

$$y_c = \frac{\int_c^d y(x_2 - x_1) dy}{\int_c^d (x_2 - x_1) dy},$$

$$x_c = \frac{1}{2} \frac{\int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy}{\int_c^d (x_2 - x_1) dy}.$$

Мисал 1. $y = \sin x$ ($x > 0$) әјрисин вә $y = \frac{2}{\pi} x$ дүз хәтти илә әһәтә олуңмуш бирчинсли ләвһәнин ағырлыг мәркәзинин координатларыны тапмалы (шәкил 41).

■ Синусонд илә дүз хәттин координат башланғычында вә $x = \frac{\pi}{2}$ нөгтәсиндә кәсишдији ашкардыр.

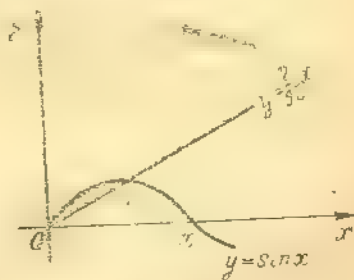
x_c вә y_c -ни тапмағ үчүн (6) вә (7) дүстурларындан истифадә едәчәјик. Әввәлчә P -ни һесаблајағ:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx = \left(\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4 - \pi}{4}.$$

Онда

$$x_c = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{P} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right].$$



Шәкил 41

$$= \frac{1}{P} \left\{ [-x \cos x + \sin x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12} \right\} = \frac{1}{P} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \right) =$$

$$= \frac{12 - \pi^2}{12P} = \frac{12 - \pi^2}{12 - 3\pi}.$$

$$y_c = \frac{1}{2P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx = \frac{1}{2P} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \frac{4}{\pi^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2P} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{24P} = \frac{\pi}{24 - 6\pi}.$$

Беләликлә, тапдыг ки, $C \left(\frac{12 - \pi^2}{12 - 3\pi}, \frac{\pi}{24 - 6\pi} \right)$ нөгтәси фигурун ағырлыг мәркәзидир. ■

Мисал 2.

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi$$

тсиклоидинин бир гөвсү вә Ox оху илә һүдудланмыш саһәнин ағырлыг мәркәзини вә охлара нәзәрән статик моментләри тапмалы (шәкил 42).

■ t параметринин артан (0-дан 2π -гә гәдәр) гүмәтләринә x -ин артан гүмәтләри уңгун кәлдиңи үчүн тсиклоидин бир гөвсү вә Ox оху илә һүдудланмыш саһә

$$P = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 + \sin t) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 (t - 2\sin t) \Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

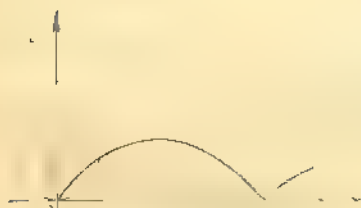
$$= 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$$

олар.

Инди исә охлара нәзәрән статик моментләри тапал:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi a} y^2 dx =$$



Шәкил 42

$$= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 z dz =$$

$$= 16a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z dz = 16a^3 \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi a^3}{2};$$

$$M_y = \int_0^{2\pi a} xy dx = a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= a^3 \left[\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t + \int_0^{2\pi} t \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos 2t}{2} dt \right) \right] = 3\pi^2 a^3.$$

Онда

$$x = \frac{M_y}{P} = \pi a, \quad y = \frac{M_x}{P} = \frac{5}{6} a.$$

Чалышмалар:

Чаваблар:

1. $y = \cos x$ косинусоиданын $x_1 = \frac{\pi}{2}$ нөггөсіндөн $x_2 = \frac{\pi}{2}$ нөггөсінә гәдәр узунлугунун Ox охуна нәзәрән статик моментини тапын.

$$\text{Чаваб: } M_x = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

2. $y = \sin x$ синусоиданын $x_1 = \pi$ нөггөсіндөн $x_2 = 2\pi$ нөггөсінә гәдәр узунлугунун Ox охуна нәзәрән статик моментини тапын.

$$\text{Чаваб: } M_x = \ln(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}.$$

3. $x^2 + y^2 = R^2$ чеврәсинин биринчи рүбдә јерләшән гөвсүнүн Ox вә Oy охларына нәзәрән статик моментләрини һесаблајын.

$$\text{Чаваб: } M_x = M_y = R^2.$$

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ еллипсинин биринчи рүбдә јерләшән һасәсинин ағырлыг мәркәзини тапын.

$$\text{Чаваб: } C \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right).$$

5. $y = \sin x$ функцијасынын бир будагы вә Ox оху илә һатә олмуш сәһәнин ағырлыг мәркәзини тапын.

$$\text{Чаваб: } C \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} \right).$$

6 $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ координатасынын јухары ниссәси илә һүдудланмыш саһәлин ағырлыг мәркәзини тапмалы.

Чаваб: $C \left(\frac{5}{6} a, \frac{16a}{9\pi} \right)$.

7. $y^2 = 4px$, $y = 0$ вә $x = a$ хәтләри илә һүдудланмыш мүстәви фигуру. Ох оху әтрафында фырланмасындан алынган чисмин ағырлыг мәркәзини тапыл.

Чаваб: $C \left(\frac{2a}{3}, 0 \right)$.

VI ФӘСИЛ

ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ МҮӨҖЛӘН ИНТЕГРАЛ

§ 1. БӘЗИ АНЛАЈЫШЛАР

$f(x, \alpha)$ функцијасынын $R: [a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d]$ дүзбүчәг-
лысында тәјин олмуш кәсиммәз функција олдуğunu фәрз
едәк, α -ны геји егсәк, онда $f(x, \alpha)$ функцијасы $[a, b]$ парча-
сында x -дән асылы кәсиммәз функција олдуғу үчүн интег-
ралланан олар вә бу интегралын нәтижәси α дәјишәнинин (па-
раметринин) функцијасыдыр.

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \quad (1)$$

Тәриф 1. (1) интегралына параметрдән асылы интег-
рал дејилир.

Бу фәсилдә биз, $f(x, \alpha)$ функцијасынын верилмиш хәссә-
ләриндән асылы олар $F(\alpha)$ функцијасынын бир сыра хәс-
сәләрини, о чүмләдән лимитини, кәсиммәзлијини, параметрә
көрә төрәмәсини интегралыны вә с. өрәлмәј к.

Геји едәк ки, (1) интегралы n сәјдә параметрдән асылы ола
биләр:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int_a^b f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) dx. \quad (2)$$

Бу һалда јухарыда сөјләдијимиз хәссәләри асылыгла (2)
функцијасы үчүн дә исбат етмәк олар.

§ 2. ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ ИНТЕГРАЛЫН КӘСИММӘЗЛИЈИ

Параметрдән асылы интегралын кәсиммәзлији дедикдә биз
 $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ функцијасынын кәсиммәзлијини баша дү-
шәчәјик.

Теорем 1. $f(x, \alpha)$ функцијасы дүзбучаглы $R: [a \leq x \leq b, c \leq \alpha \leq d]$ областында һәр ики дәјишәнә көрә кәсилмәздирсә, онда (1) бәрабәрлији илә тә'јин олунан $F(\alpha)$ функцијасы $[c, d]$ парчасында кәсилмәздир.

◀ $f(x, \alpha)$ функцијасы гапалы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғу үчүн Кантор теореминә көрә һәммин областа мүн-гәзәм кәсилмәз олар. Јәни $\forall \varepsilon > 0$ әдәлини гаршы елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, R -ә дахил олан истәнилән ны (x_1, α_1) вә (x_2, α_2) нөгтәләри үчүн $|x_2 - x_1| < \delta, |\alpha_2 - \alpha_1| < \delta$ олдуғда

$$|f(x_2, \alpha_2) - f(x_1, \alpha_1)| < \varepsilon. \quad (3)$$

(1)-дән

$$\begin{aligned} F(\alpha + h) - F(\alpha) &= \int_a^b f(x, \alpha + h) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx = \\ &= \int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)] dx. \end{aligned} \quad (4)$$

(3)-дә $x_1 = x_2 = x, \alpha = \alpha, \alpha = \alpha + h$ ишарә етсәк, $\forall \varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta > 0$ тапмағ олар ки, $[c, d]$ парчасына дахил олан ихтијари α вә $\alpha + h$ нөгтәләри үчүн $|h| < \delta$ олдуғда

$$|f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

олар.

(4) бәрабәрлијинин мүтләғ гијмәтини тапсағ,

$$\begin{aligned} |F(\alpha + h) - F(\alpha)| &= \left| \int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)| dx < \frac{\varepsilon}{b - a} \int_a^b dx = \varepsilon \end{aligned}$$

Алдығ ки, $[c, d]$ парчасынын һәр бир нөгтәсиндә (демәли, $[c, d]$ парчасынын өзүндә) $F(\alpha)$ функцијасы кәсилмәздир. ▶

Теорем 2. (Интеграл ишарәси алтында лимитә кеч-мә). $f(x, \alpha)$ функцијасы $R: [a \leq x \leq b, c \leq \alpha \leq d]$ дүзбучаглы областында, һәр ики дәјишәнә нәзәрән кәсилмәздирсә, α исә $[c, d]$ парчасынын ихтијари гејд олунмуш нөгтәси оларса, онда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx. \quad (5)$$

◀ Теорем 1-ә көрә $f(x, \alpha)$ функцијасы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғу үчүн

$$F(\alpha) = \int_{\alpha}^b f(x, \alpha) dx$$

функциясы $[c, d]$ парчасында кэснлмэз олар. Кэснлмэз функцианын тэрифинэ көрө

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(\alpha) = F\left(\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \alpha\right) = F(\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^b f(x, \alpha_0) dx \\ = \int_{\alpha_0}^b \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx.$$

Белэликлэ, исбат етнх кн, (а) бэрэбэрлнлн доғрудур.

Теорем 3. 1) $f(x, z)$ функцијасы дүзбучаглы $R: [a < c \leq b; c \leq \alpha \leq d]$ областында кэснлмэздирсэ, 2) $\varphi(z)$ вэ $\psi(z)$ функцијалары $[c, d]$ -дэ кэснлмэз олуб, $a \leq \varphi(z) \leq b$, $a \leq \psi(z) \leq b$ мүнәсибэтлэрини өдәјирсэ, онда

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx$$

функцијасы $[c, d]$ парчасында кэснлмэз олар.

◀ Экэр $\alpha, \alpha + h \in [c, d]$ оларса, онда

$$\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha+h)}^{\psi(\alpha+h)} f(x, \alpha + h) dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx \quad (6)$$

Дикэр гөрөфүн

$$\int_{\varphi(\alpha+h)}^{\psi(\alpha+h)} f(x, \alpha + h) dx = \int_{\varphi(\alpha+h)}^{\varphi(\alpha)} f(x, \alpha + h) dx + \\ + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha + h) dx + \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x, \alpha + h) dx. \quad (7)$$

(7)-ни (6)-да нэзэрэ алсаг

$$\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha+h)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha + h) dx + \\ + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x, \alpha + h) dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)] dx. \quad (8)$$

(8) бэрэбэрлнлннн сағ тэрәфиндэн баринчи вэ екннчи интегралларын мүтлэг гнјмэтлэри

$$M | \varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha) |, \quad (9)$$

$$M | \psi(\alpha + h) - \psi(\alpha) | \quad (10)$$

әдәдләрини ашмаз, үчүнчү интеграл исә $h \rightarrow 0$ олцугда (теорем 2-я әсасән) сыфра јахынлашар.

$\varphi(\alpha)$ вә $\psi(\alpha)$ функцијалары $[c, d]$ -дә кәсилмәз олцуглары үчүн $h \rightarrow 0$ олцугда (9) вә (10) ифадәләри сыфра јахынлашар.

Беләликлә, алдыг ки,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(\alpha + h) = \Phi(\alpha).$$

Демәли, $\Phi(\alpha)$ функцијасы $[c, d]$ -дә кәсилмәздир.

§ 3. ПАРАМЕТРДӘН АСЫЛЫ ИНТЕГРАЛЫН ДИФЕРЕНЦИАЛЛАНМАСЫ

Теорем 1. $f(x, \alpha)$ функцијасы вә онун α -ја нәзәрән $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ хусуси төрәмәси дүзбучаглы $R: [a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d]$ областында кәсилмәздирсә, онда

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \quad (1)$$

функцијасы $[c, d]$ парчасында дифференциалланандыр вә

$$F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \quad (2)$$

► h -ы елә сечәк ки, $\alpha, \alpha + h \in [c, d]$ олсун. Онда

$$F(\alpha + h) - F(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)] dx \quad (3)$$

олар. (3) вә (1) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг

$$F(\alpha + h) - F(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)] dx \quad (4)$$

бәрабәрлијини аларыг.

$f(x, \alpha)$ функцијасы α -ја нәзәрән төрәмәләнен олцугу, үчүн Лагранжын сонлу аргым дүстуруну тәтбиг елә биләрик:

$$f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha) = hf'_\alpha(x, \alpha + \theta h), \quad (0 < \theta < 1). \quad (5)$$

(5)-и (4)-дә нәзәрә алсаг,

$$F(a+h) - F(a) = h \int_a^b f'_x(x, \alpha + \theta h) dx \quad (0 < \theta < 1)$$

вә ја

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \int_a^b f'_x(x, \alpha + \theta h) dx \quad (6)$$

олар. (6) бәрәбәрлијинин һәр тәрәфинә $-\int_a^b f_x(x, \alpha) dx$ интегралыны әлавә етсәк,

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} - \int_a^b f'_x(x, \alpha) dx = \int_a^b [f'_x(x, \alpha + \theta h) - f'_x(x, \alpha)] dx$$

вә ја

$$\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} - \int_a^b f'_x(x, \alpha) dx \right| \leq \int_a^b |f'_x(x, \alpha + \theta h) - f'_x(x, \alpha)| dx \quad (7)$$

бәрәбәрсизлијини аларыг.

Шәртә көрә $f'_x(x, \alpha)$ функцијасы гапалы R областында кәсилмәздир, онда һәммин функција R -дә мүнәзәм кәсилмәз олар. Мүнәзәм кәсилмәзлијин тәрифинә көрә $\forall \varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta > 0$ әдәди тапмаг олар ки, $h < \delta$ олдугда

$$|f'_x(x, \alpha + \theta h) - f'_x(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (8)$$

(8)-и (7)-дә нәзәрә алсаг

$$\int_a^b |f'_x(x, \alpha + \theta h) - f'_x(x, \alpha)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon. \quad (9)$$

Нәһәјәт (7) вә (9) бәрәбәрсизликләриндән

$$\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} - \int_a^b f'_x(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon$$

мүнәсибәтинин доғрулуғу алыныр.

Беләликлә, алырыг ки,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = F'(a) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} dx < \varepsilon$$

(2) барабарлиги исбат олунду.

Теорем 2. 1) $f(x, z)$ функцијасы ва онун $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ ху-
суси төрөмөсү $R: [a \leq x \leq b; c \leq z \leq d]$ дүзбучагылы об-
ластында кәсилмәздирсә; 2) $\varphi(z)$ ва $\psi(z)$ функцијалары
[c, d] парчасында кәсилмәз олуб, $a \leq \varphi(z) \leq b$, $a \leq \psi(z) \leq b$
мүнәсибәтләрини өдәјирсә, онда

$$F(z) = \int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} f(x, z) dx \quad (9)$$

функцијасы [c, d] парчасында дифференциалланан олуб

$$F'(z) = \int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} dz + f[\psi(z), z] \psi'(z) - f[\varphi(z), z] \varphi'(z) \quad (10)$$

олар.

Хүсуси һалда $\varphi(z)$ ва $\psi(z)$ функцијалары [c, d] парчасын-
да сабитдирсә, онда $\varphi'(z) = \psi'(z) = 0$ олар. Бу һалда (10)
дүстуру (2) шәклинә дүшәр.

◀ $\varphi(z) = v$, $\psi(z) = u$ илә ишарә етсәк, онда

$$F(z) = \Phi(z, u, v) = \int_v^u f(x, z) dx \quad (11)$$

барабарлигини алары.

$\Phi(z, u, v)$ функцијасынын бүтүн аргументләре нәзәрән кә-
силмәз төрөмәсін олтуғуна көрә ашагыдакыны јазы биләрик:

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (12)$$

(11) барабарлигиндән нәвбә илә u ва v -јә нәзәрән төрәмә
алсаг

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} dx, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = f[\psi(z), z]; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \psi'(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -f[\varphi(z), z], \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(z)$$

олар. Сонунму барабарликләри (12)-дә нәзәрә алсаг, (10) ба-
рабарлигини исбат етмиш олары. ►

Мисал 1. $F(t) = \int_0^t f(x) \sin(t-x) dx$ функцијасынын

$y''(t) + a^2 y(t) = f(t)$ гәнлијинин һәлли олдуғуну көстәрин
(бурада $f(x)$ функцијасы мүјјән аралыгда кәсилмәзdir).

■ Эввелчэ $F'(t)$ вэ $F''(t)$ төрэмэлгэрини таага:

$$F'(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(x) \omega \cdot \cos \omega(t-x) dx + \frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega(t-t) \\ - \int_0^t f(x) \cos \omega(t-x) dx,$$

$$F''(t) = \int_0^t f(x) \omega \sin(t-x) dx + f(t) \cos \omega(t-t) \\ - \omega \int_0^t f(x) \sin \omega(t-x) dx = f(t).$$

$F'(t)$ вэ $F''(t)$ -ийн бүлгэмэлгэрлэни тэдэндэ нэзэрэ алсаг, $f(t) = f(t)$ олар. ■

Мисал 2. $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx$ функциясны төрэмэлгэрини тапмалы.

■ (10) үзгүрүлдэл хэс. ф-цад өгсөх ($\psi(x) = x$, $\varphi(x) = 0$),

$$F'(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{1+ax} dx + \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} \cdot 1 = \\ = \int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)(1+ax)} + \frac{\ln(1+a^2)}{1+x^2}. \quad \blacksquare$$

4. ПАРАМЕТРЭ НЭЗӨРӨН ИНТЕГРАЛЛАМА

$f(x, a)$ функциясны $R: [a \leq x \leq b; c \leq a \leq d]$ дүрбүчлэлы областында кэснлмэзирсэ, онда

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, a) da \quad (1)$$

(1) функциясны $[a, b]$ -дэ кэснлмэзир (§ 2, теорем 1). Егн сэбэбэ көрө дөж бэлэрик ки,

$$\Psi(a) = \int_a^b f(x, a) dx. \quad (2)$$

(2) функциясны $[c, d]$ парчасында кэснлмэзир.

$\Phi(x)$ вэ $\Psi(a)$ функциелары утгун оларат $[a, b]$ вэ $[c, d]$ парчаларында кэснлмэз олдуру үчүн хэмин парчаларда интегралланан олар. Онда

$$A \int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, z) dz \right) dx,$$

$$B \int_c^d \Psi(z) dz = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, z) dx \right) dz.$$

Теорем. $f(x, z)$ функцијасы дүзбучагылы $R: |a \leq x \leq b$
 $c \leq z \leq d|$ областында кәсилмәздирсә, онда

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, z) dx \right) dz = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, z) dz \right) dx \quad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур.

$$L_1(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x, z) dx \right) dz \quad (4)$$

$$L_2(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, z) dz \right) dx \quad (5)$$

функцияларына баһал.

Ашкартыр $x, t \in R$ оларга, $L_1(c) = L_2(c) = 0$ олар. Кәс-
 гәрәк ки, $\forall t \in [c, d]$ үчүн $L_1(t) = L_2(t)$ бәрабәрлији доғрудур.
 (4) бәрабәрлији дәгәр параметр t үзгәрүсүзләмә алса.

$$L_1(t) = \int_a^b f(x, t) dx. \quad (6)$$

(5)-дән төрәмә алсаг исе

$$L_2(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_a^b \left(\int_c^t f(x, z) dz \right) dx \right] = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\int_c^t f(x, z) dz \right) dx = \int_a^b f(x, t) dx. \quad (7)$$

(6) вә (7) бәрабәрликләрини ең төрәфләри бәрабәр ол-
 дуғу үчүн сол төрәфләри дә бәрабәр олар. Јәни $L_1(t)$
 $= L_2(t)$ вә ја $L_1(t) = L_2(t) + C$ олар.

$L_1(c) = L_2(c) = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $C = 0$ олмасы
 ашкартыр. Онда $L_1(t) = L_2(t)$ бәрабәрлији t -ни бүтүн гад-
 мәтләриндә, о чүмләдән $t = x$ гадмәтиндә дә доғрудур.
 Беләликлә, нәбат етдик ки, (3) бәрабәрлији доғрудур. ►

Мисал $f(x, z) = x^2$ функцијасынын $[0, 1; a, b]$ дүзбучагы-
 лысында

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^b x^2 dx \right) dx \quad (8)$$

барабарлыгыны өздөтүшүна жоктамалы.

■ $f(x) = x^2$ функциясы $[0, 1, a, b]$ дүзбучаглы областында теоремин шарттарини өздөтүшү үчүн (8) барабарлыгына жана (8) барабарлыгына иштирак сиз интеграллары аярыча несаблалдыгда да жамин негичиле калмак олар.

Интегралалты функция кесилген олдугда теорем догру олмајачагдыр. Догрудан да, $f(x, z) = \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}$ функциясы үчүн $[0, 1; 0, 1]$ дүзбучаглы областында теоремин шарты өдөнмөдү ($(0, 0)$ негтесинде функция кесилгендир) үчүн

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} dz \right) dx.$$

Билаваситө несабласаг көрөрик ки, бу интегралларын гијмелери $\frac{\pi}{4}$ вө $\frac{\pi}{4}$ эдөдлөринө барабардыр.

§ 5. ПАРАМЕТРДӨН АСЫЛЫ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛ

Биз дөрдүнчү параграфла јухары сөрһөдн соллу эдөд олан параметрдөн асылы интегралларын бөзүн хасселери илө талыш олдуз.

Бу параграфла исе јухары ашагы сөрһөдн вө ја сөрһөдлөринин бәр икиси) сөрһөдн солсүмүг олан параметрдөн асылы ашагыдакы интегралларын

$$\int_a^{+\infty} f(x, z) dx, \int_{-\infty}^b f(x, z) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) dx$$

бөзүн хасселеринин өјрөнөчөтк. Бу интеграллардан бири үчүн олан хасселер галанлары үчүн да догру олдуғундан, буларын бири наггында данышмаг кифајетдир.

Параметрдөн асылы гејри-мәхсуси интеграллар табиятча функционал сыралара бөзүн јр.

Фөз эдөк ки, $f(x, z)$ функциясы $G: (a_0 < z < a_1, a \leq x < +\infty)$ областында тәјин олунмушдур. $[z_0, z_1]$ парчасындан көтүрүл мүш ихтијари α^* негтесинде

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \quad (1)$$

гејри-мәхсуси интегралы јытыландырса, бу интегралын гијмәти параметрдөн асылы олар.

Тә'риф 1. $a^* \in [a_0, a_1]$ нөктәсində

$$\int_a^{\infty} f(x, a^*) dx$$

интегралы ыгылановырса (вә ја $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, a^*) dx$ лимити сонлуодурса), онда (1) интегралы $[a_0, a_1]$ парчасында ыгыландыр дежилир.

Параметрдән асылы сонсуз сәрхәдлһ (1) интегралы үчүн дә чәмин кәсилмәзлији, параметрә нәзәрән төрәмәалма, параметрә нәзәрән интеграллама вә с. хәссәләри исбат етмәк олар.

Тә'риф 2. (1) интегралы $[a_0, a_1]$ парчасында ыгылановырса, $\forall \varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $([a_0, a_1]$ парчасына дахил олан бүтүн N -лар үчүн) елә N нөмрәси варса ки, $b > N$ ол-дугда

$$\left| \int_b^{\infty} f(x, a) dx \right| < \varepsilon$$

оларса, (1) интегралына $[a_0, a_1]$ парчасында мүнтәзәм ыгылан интеграл дежилир.

Тә'рифдән бәлағәситә ашкардыр ки, N -нин сечәлмәси һәм ε -дән вә һәм дә a -дан асылы оларса (1) интегралының $[a_0, a_1]$ парчасында ыгылмас л гејри-мүнтәзәм олар.

Теорем 1. $f(x, a)$ функцијасы $G: (x_0 \leq a \leq a_1, a \leq x < \infty)$ областында кәсилмәздирсә, (1) интегралы $[a_0, a_1]$ парчасында мүнтәзәм ыгылырса, онда

$$F(a) = \int_a^{\infty} f(x, a) dx$$

функцијасы $[a_0, a_1]$ парчасында кәсилмәз олар.

◀ Шәртә кәрә (1) мүнтәзәм ыгылыр. мүнтәзәм ыгылмәһын тә'рифинә кәрә исә $\forall \varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $N = N(\varepsilon) > a$ әдәди вар ки, $\forall a \in [a_0, a_1]$ үчүн

$$\left| \int_N^{\infty} f(x, a) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

бәрабәрсизлији өдәнилер.

Дикәр тәрәфдән,

$$F(a) = \int_a^N f(x, a) dx + \int_N^{\infty} f(x, a) dx \quad (3)$$

$$F(a + \Delta a) = \int_a^N f(x, a + \Delta a) dx + \int_N^{\infty} f(x, a + \Delta a) dx \quad (4)$$

олдугу ашкардыр.

(4) бəрабərлигини (3) бəрабərлигини чыксаг

$$F(a + \Delta a) - F(a) = \int_a^N [f(x, a + \Delta a) - f(x, a)] dx + \int_N^{\infty} f(x, a + \Delta a) dx - \int_N^{\infty} f(x, a) dx$$

вə жа

$$|F(a + \Delta a) - F(a)| \leq \int_a^N |f(x, a + \Delta a) - f(x, a)| dx + \left| \int_N^{\infty} f(x, a + \Delta a) dx \right| + \left| \int_N^{\infty} f(x, a) dx \right|. \quad (5)$$

$f(x, a)$ функцијасы гапалы $R: [a \leq x \leq N; a_0 \leq a \leq a_1]$ да бучаглысында мўтəзəм к сиймəз олдугу үчүн $\forall \varepsilon > 0$ гаршы елə $\delta > 0$ əдəди вар ки, $\forall x \in [a, N]$ вə $\forall a \in [a_0, a_1]$, $|\Delta a| < \delta$ олдугда

$$|f(x, a + \Delta a) - f(x, a)| < \frac{\varepsilon}{3(N - a_0)} \quad (6)$$

олар, (6) вə (2) бəрабəренликлəрини (5)-дə нəзəрə алсаг,

$$|F(a + \Delta a) - F(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3(N - a_0)} (N - a_0) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

олар. Демəли, $F(a)$ функцијасы $[a_0, a_1]$ парчасында кəсильмəз.

Теорем 2. $f(x, a)$ функцијасы $G(a_0 \leq a \leq a_1, a \leq x < +\infty)$ областында тə'јин едилмиш кəсильмəз функцијадырса вə $\int_a^{\infty} f(x, a) dx$ интегралы $[a_0, a_1]$ парчасында мўнтəзəм жығыландырса, онда

$$\lim_{a \rightarrow a^*} \int_a^{\infty} f(x, a) dx = \int_a^{\infty} \lim_{a \rightarrow a^*} f(x, a) dx, \quad a^* \in [a_0, a_1].$$

◀ Бу теоремин шəртлəри бундан əвəлки теоремин шəртлəри (теорем 1) влə үст-үстə түшүпү үчүн $F(a) = \int_a^{\infty} f(x, a) dx$ функцијасы $[a_0, a_1]$ парчасында кəсильмəз олар. Онда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} F(\alpha) = F(\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} \alpha) = F(\alpha^*)$$

олмасындан

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} f(x, \alpha) dx$$

барабарлигинин догрудугу алыныр. ►

Теорем 3. $f(x, \alpha)$ *функциясы* $G: (a \leq x < +\infty; \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1)$ *областында* x -*нэзэрэн кэсилмэз*, $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ *хү-*
суси төрәмэси G *областында кэсилмэздирсэ*, $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} dx$
интегралы $[x, \alpha_1]$ *парчасында мүнтэзэм жыгылырса*,
онда

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx$$

функциясы $[\alpha_0, \alpha_1]$ α -*ја нэзэрэн төрәмэлэнэн олуб*,
төрәмэси

$$F'(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

барабардир.

$$\Phi(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

функциясына $F'(\alpha)$ $\Phi(\alpha)$ *олдугуну исбат егсэк*,
теорем исбат олунмуш олар. Бу мәгсэдлэ

$$\{L_n(\alpha)\} = \int_a^n f(x, \alpha) dx$$

артычыллыгыны дүзөлдөк. Анкардыр ки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x, \alpha) dx = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx = F(\alpha).$$

Теоремин шэртлэринэ асасланьб дејэ билэрик ки, $L_n(\alpha)$
функциялары төрәмэлэнэндир вэ

$$L'_n(\alpha) = \int_a^n \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \Phi(\alpha).$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \text{ интегралы } [\alpha_0, \alpha_1] \text{ парчасында мүнтәзәм жы-}$$

ғылдыгы үчүн, онда $\{L_n(x)\}$ ардычыллыгы $\Phi(\alpha)$ функцијасына мүнтәзәм жыгылар.

Ардычыллыгын дифференциаллау мисына анд теоремә* эса-сэн ашагыдакыны жаза биләрик:

$$F'(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dL_n(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \Phi(\alpha).$$

Аларыг ки,

$$F'(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \blacktriangleright$$

Теорем 4. Биринчи теоремин шәртләри өдәниләр-сә, онда

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \right) d\alpha,$$

башга сөзлә, јухарыда гејд олунан шәртләр дахилин-дә х-ә вә α-ја көрә интеграллама нөвбәсини дәјүшмәк олар:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^{+\infty} \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx.$$

$$\blacktriangleleft \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx \text{ интегралы } [z_1, \alpha] \text{ парчасында мүнтәзәм жы-}$$

ғылан олдугу үчүн, кифајәт гәләр бөјүк N әдәди үчүн $N > a$ олдугда

$$\left| \int_N^{+\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon \quad (7)$$

* $\{u_n(x)\}$ функцијалар ардычыллыгы $[a, b]$ парчасынын һеч олмаса бир нә-тәсин дә жыгылырса вә төрәмәләрдән дүзәлмиш $\{u'_n(x)\}$ ардычыллыгы $[a, b]$ -дә мүнтәзәм жыгылырса, онда $\{u_n(x)\}$ ардычыллыгы да $[a, b]$ -дә мүнтәзәм жыгыландыр, онун лимити олан $u(x)$ функцијасы бу парчада төрәмәләнән-дир

$$u'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(x).$$

$$\int_a^{+\infty} f(x, a) dx$$

интегралынын $[a_0, a_1]$ парчасында мүнтөзөм жығылан олмасы үчүн кафи шартдир.

► $\bar{x} < x$ шартини өдөјөн x -ләр үчүн бәрабәрсизлик өдәнилер. $\int_{\bar{x}}^{+\infty} \varphi(x) dx$ интегралы жығылан олдугундан, $\forall \delta > 0$ әдәди үчүн елә кифәјәт гәдәр бөјүк $N > \bar{x}$ әдәди тапмаг олар ки, $\delta > N$ олдугда $\int_b^{+\infty} |\varphi(x)| dx < \varepsilon$ олар. Онда

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, a) dx \right| \leq \int_b^{+\infty} |f(x, a)| dx \leq \int_b^{+\infty} |\varphi(x)| dx < \varepsilon$$

олар. Сонунчу бәрабәрсизлик исә $\int_a^{+\infty} f(x, a) dx$ интегралынын $[a_0, a_1]$ парчасында мүнтөзөм жығылан олдугуну көстәрир. ►

Мисал 1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$, $a \in [a_0, a_1]$ интегралынын мүнтөзөм жығылан олдугуну көстәрин.

■ Ихтијари $[a_0, a_1]$ $\exists a$ үчүн $\frac{1}{a^2 + x^2} < \frac{1}{x^2}$ олмасындан вә $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралынын мүтләг жығылан олмасындан алырыг ки, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ интегралы $\forall a \in [a_0, a_1]$ үчүн мүнгәзөм жығылыр.

Мисал 2. Пуассон* $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ интегралыны һесабламалы.

■ $x = at$ ($a > 0$ параметрдинр) әвәзләмәсини апарсаг

$$J = \int_0^{\infty} a e^{-a^2 t^2} dt$$

* Симеон Дени Пуассон (1781 - 1842) мәшһур франсыз рижани, алчысыдыр. Овун алдыгы елми нәтичәләр мұхтәлиф елм сәһәләринә, о чүмләдән рижанијат, физикаја, механикаја вә с. аиддир. О, рижани физиканын әсасыны гојмуш, Фурје сырасына, тәјри-мүәјјән интеграла, вариация һесабына, сһтимал нәзәријәсинә вә с. аид фундаментал нәтичәләр алмышдыр.

олар. Сонунчу бэрэбэрлијин һэр ики тэрәфини $e^{-a^2} da$ -ја ву-
руб a -ја нэзэрэн интегралласаг (0-дан ∞ -а гэдэр)

$$\int_0^{\infty} J e^{-a^2} da = \int_0^{\infty} a e^{-a^2} da \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

олар. Бэрэбэрлијин сол тэрәфи

$$\int_0^{\infty} J e^{-a^2} da = J \int_0^{\infty} e^{-a^2} da = J^2$$

олур. Саг тэрәфдә исә интеграллама нөвбәсини дэјишсәк

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} a e^{-a^2} da \int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt &= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)a^2} da = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\left[\frac{e^{-(1+t^2)a^2}}{-2(1+t^2)} \right]_0^{\infty} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} t]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

олдугуну аларыг. Беләликлә, алырыг: $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ■

Ч а л ы ш м а л а р:

Ч а в а б л а р:

1. Ашагыдакы лимитләри һесабламалы:

а) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \sqrt{x^2 + a^2} dx$, б) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}$,

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$, г) $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x + \frac{1}{a})}{\ln(x + a^2)} dx$.

Ч а в а б: а) 1, б) $\frac{\pi}{4}$, в) $\ln \frac{2e}{1+e}$, г) $\frac{1}{2}$.

2. $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$

Интеграл алтында лимитә кечмә әмәли ганунудурму?

Ч а в а б: Јох

3. Параметра нәзәрән дифференциаллама әмәлини тәтбиғ едәрәк интегралы һесаплајын:

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b \cos^2 x) dx.$$

Җаваб: $\pi \ln \frac{a+b}{2}$.

4. Исбат едикки, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-t)^2} dt$ функцијасы кәсилмәздир.

5. $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$, ($x > 0$, $\beta > 0$) интегралыны һесапламалы.

Җаваб: $J = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$.

6. $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{x^2 + \beta^2} dx$ интегралыны һесапламалы.

Җаваб: $J = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$.

VII ФӘСИЛ

ЕҖЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРЫ

§ 1. БИРИНЧИ НӨВ ЕҖЛЕР ИНТЕГРАЛЫ

Тә'риф 1. *Биринчи нөв Еҗлер интегралы вә ја В ("бета") функција*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1)$$

бәрабәрлији илә тә'јин едилән функцијага дејилир.

Асанлыгла көстәрмәк олар кки, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ олдугда (1) интегралы јығылан, бу параметрләрдән һеч олмаса бири сыфыр вә ја сыфырдан кичик оларса, бу интеграл дагылан олар.

$B(\alpha, \beta)$ функцијасынын хассәләри

Хассә 1. $B(\alpha, \beta)$ функцијасы өз аргументләринин симметрик функцијасыдыр, јә'ни

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha). \quad (2)$$

◀ $x=1-t$ эвэлэмэс апарсаг, (1) бэрэбэрлиж

$$B(\alpha, \beta) = - \int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = \left| \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right|$$

$$\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\alpha-1} dx = B(\beta, \alpha)$$

олар. (2) бэрэбэрлиж исбат олунду. ▶

Хэсэг 2. $\beta > 1$ олцугда Бета-функциясы

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} \cdot B(\alpha, \beta-1) \quad (3)$$

мүнәсибәтини өдәйир.

(3)-ү исбат етмәк үчүн эвэлчә (1) интегралыны хиссә-хиссә интеграллајар. Онда

$$\left| \begin{array}{l} u = (1-x)^{\beta-1}, \quad du = -(\beta-1)(1-x)^{\beta-2} dx \\ dv = x^{\alpha-1} dx \quad v = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \left[\frac{1}{\alpha} (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\beta-1}{\alpha} x^{\alpha} (1-x)^{\beta-2} dx \\ &= \frac{\beta-1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-2} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) бэрэбэрлијиндә x^{α} эвәзинә

$$x^{\alpha} \equiv x^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} (1-x) \quad (5)$$

ејнәлијини јазсаг

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \frac{\beta-1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-2} dx - \\ &\quad \frac{\beta-1}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \end{aligned} \quad (6)$$

олар. Бета функциясының тәрифиңә асасәп (6)-дан

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-2} dx = B(\alpha, \beta-1). \quad (7)$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = B(\alpha, \beta). \quad (8)$$

олдуғуну аларыг.

(6), (7) вэ (8) бэрабэрликлэриндэн

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta-1) - \frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta)$$

вэ ја

$$\left(1 + \frac{\beta-1}{\alpha}\right) B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta-1),$$

$$\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha, \beta-1)$$

вэ нэһајет

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha, \beta-1).$$

Бета функцијасы α вэ β параметрлэринэ нэзэрэн симметрик олдуғундан

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha-1, \beta). \quad (9)$$

(3) вэ (9) бэрабэрликлэринин сол тэрэфлэри бэрабэр олдуғунан сағ тэрэфлэр дэ бэрабэр олар, јэни

$$\frac{\beta-1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha, \beta-1) = \frac{\alpha-1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha-1, \beta).$$

$\alpha + \beta - 1$ -а ихтисар етсэк,

$$(\beta-1) B(\alpha, \beta-1) = (\alpha-1) B(\alpha-1, \beta). \quad (10)$$

(10)-да $\alpha-1=p$ вэ $\beta-1=q$ илә ишарэ етсэк

$$B(p, q-1) = \frac{p}{q} B(p+1, q)$$

олар. (3) бэрабэрлијиндэ $\beta=n$ (n -тамдыр) оларса вэ (3) бэрабэрлијини ардычыл тэтбиг етсэк

$$B(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha + n - 1} \cdot \frac{n-2}{\alpha + n - 2} \dots \frac{1}{\alpha + 1} B(\alpha, 1)$$

олар.

$$B(\alpha, 1) = \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha}$$

олдуғуну нэзэрэ алсағ.

$$\begin{aligned} B(\alpha, n) &= B(n, \alpha) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n-1)} = \\ &= \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}. \end{aligned}$$

Сонунчуда $\alpha=m$ (m -там эдэддир) эвэз едиб (9) дүстү-руну ардычыл тэтбиг етсэк



$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)} B(m, 1) \quad (11)$$

олар.

$$B(m, 1) = \frac{(m-1)}{m} \cdot \frac{m-2}{m-1} \dots \frac{1}{2} B(1, 1) \quad (B(1, 1) = 1)$$

олдугуну (11)-дә нәзәрә алсаг

$$B(m, n) = \frac{(n-1)! (m-1)!}{(m+n-1)!}$$

Хүсуси Һалда $n = m$ оларса, $B(n, n) = \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$ олар.

(1) бәрәбәрлијиндә $\beta = \alpha$ оларса,

$$B(\alpha, \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{\alpha-1} dx$$

олар. $y = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2$ функцијасынын графики $x = \frac{1}{2}$ дүз хәттинә нәзәрән симметрик олдуғу үчүн

$$B(\alpha, \alpha) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{\alpha-1} dx$$

олар. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t$ t әвәзләмәси апарсаг $\left(dx = -\frac{dt}{2} \right)$,

$$B(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1} dt.$$

Бера функцијасынын тә'рифинә әсасән

$$B(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right).$$

(1) интегралыны башга шәкилдә дә јаза биләрик. Бу мәгсәдлә $x = \frac{y}{1+y}$ әвәзләмәсини апарсаг вә $dx = \frac{dy}{1+y}$, $1-x = \frac{1}{1+y}$ олдуғуну нәзәрә алсаг ашағытакыны јаза биләрик:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy \quad (12)$$

§ 2. ИКИНЧИ НӨВ ЕҮЛЕР ИНТЕГРАЛЫ

Тэгшитгэл Икинчи нөв Еүлер интегралы вэ ја Γ (гамма) функциясч

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad (\alpha > 0) \quad (1)$$

бэрүүр рүү, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр.

Эдгээр интегралыг $\alpha > 0$ олунан хувиарч, $x = ty$ гэж хувиарч, интегралыг

Буса вэ Гамма функциясч дээрх интегралыг $\Gamma(\alpha)$ гэж хувиарч, (1) бэрүүр рүү, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} y^{\alpha-1} e^{-ty} t dy = t^{\alpha} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-ty} dy \quad \left| \begin{array}{l} x = y \\ 0 = 0 \\ \infty = \infty \end{array} \right|$$

вэ ја

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{t^{\alpha}} = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-ty} dy \quad (2)$$

олар, (2) тэгшитгэл рүү, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр.

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy \quad (3)$$

тэгшитгэл рүү, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр.

$$\Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy \right) t^{\alpha-1} dt \quad (4)$$

олар, (4) тэгшитгэл рүү, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр, түүнэ тэдүнх олунан функцијага өөжилнр.

$$\Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right) y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} dy$$

вэ ја

$$\Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} (ty)^{\alpha-1} e^{-t} dt \right) y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} dy =$$

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right) y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} \Gamma(\alpha) y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} dy$$

$$= \Gamma(\alpha) \cdot \int_0^{\infty} y^{\beta-1} e^{-y} dy = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta). \quad (5)$$

олар. (5) бəрəбəрлiјиндəн исə

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (6)$$

олугуну алырыг. (6) дүстүрү Бета вə Гамма функцијаларыны əлагəлəндирəн дүстүрдүр.

Гамма функцијасынын хассəлəри

$$\text{Хассə.} \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad (7)$$

бəрəбəрлiји доғрудүр.

◀ (1) бəрəбəрлiјиндə α əвəзинə $\alpha + 1$ жазсар

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \quad (8)$$

алынар. (8) бəрəбəрлiјини сəг тəрəфиндəк интеграла ийисə-нissə интеграллама дүстүрүнү тəтбиғ етсəк

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^{\alpha} & du = \alpha x^{\alpha-1} dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \left[-x^{\alpha} e^{-x} \right]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha). \quad \blacktriangleright$$

(1) бəрəбəрлiјиндə $\alpha = 1$ жазсар

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

олугуну алырыг. $\alpha = n$ олмгала (1) бəрəбəрлiјини доғру алырыг. Г-биг етсəк,

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \Gamma(1) = n! \end{aligned}$$

олугуну алырыг. Белəликкə, алырыг кə, $\alpha = n$ олдугда

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Ејлер—Гаус дүстүрү

(1) бəрəбəрлiјиндə $e^{-z} z^{\alpha-1}$ əвəзмəтлi апарсар

$$dx = \frac{az}{z}, \quad x = \ln \frac{1}{z} \quad \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \\ \infty \rightarrow 0 \end{array} \right|$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z} \right)^{\alpha-1} dz \quad (9)$$

олар. (9) бəрəбəрлiјини башга шəкилдə кəстəрмəк үчүн аша-
ғыдакы лiмiти һесаблајаг (Лопитал ғајдасындан истифадə
едилir):

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n(1-z)^{\frac{1}{n}} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{\frac{1}{n}} \ln z \left(-\frac{1}{n^2} \right)}{-\frac{1}{n^2}} = \\ &= -\ln z = \ln \frac{1}{z}\end{aligned}\quad (10)$$

10)-у (9)-да нəзəрə алсаг,

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(1 - z^n \right) \right]^{z-1} dz = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{z-1} \int_0^1 \left(1 - z^n \right)^{z-1} dz.\end{aligned}\quad (11)$$

(11) бəрəбəрлiјиндə јенидэн $z = y^n$ ($dz = ny^{n-1} dy$) əвəз-
лəмəси апарсаг,

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{n-1} dy. \quad (12)$$

$$B(n, \alpha) = \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{\alpha-1} dy$$

олдуғуну (12)-дə нəзəрə алсаг,

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} B(n, \alpha) \quad (13)$$

бəрəбəрлiјини аларыг.

$$B(n, \alpha) = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}$$

олдуғуну (13)-дə јеринə јазсаг

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}$$

бəрəбəрлiјини аларыг ки. бу бəрəбəрлiјə дə Ејлер — Гаус
дүстүрү дејилir.

Чалышмалар:

Чаваблар:

1. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ Ејлер интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $x = a\sqrt{t}$, $t > 0$).

$$\text{Чаваб: } \frac{\pi a^4}{16}.$$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ Ејлер интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $x^3 = t$).

$$\text{Чаваб: } \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^3 x dx$ интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $\sin x = \sqrt{t}$, $t > a$).

$$\text{Чаваб: } \frac{3\pi}{512}.$$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{n\sqrt{1-x^n}}$ интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$).

$$\text{Чаваб: } \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

5. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$ интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $x = \sqrt{t}$, $t > 0$; n —тамдыр).

$$\text{Чаваб: } \frac{(n-1)!!}{2^{n+1}} \pi.$$

6. $\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x-c)^{m+n-2}} dx$ интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $\frac{x-a}{x-c} = \frac{b-a}{b+c} t$, $0 < a < b$, $c > 0$).

$$\text{Чаваб: } \frac{(b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1)}{(b+c)^{m+1} (a+c)^{n+1}}.$$

7. $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx$ интегралыны һесабламалы (эвэзлэмәси $\ln \frac{1}{x} = t$).

$$\text{Чаваб: } \Gamma(p+1) (p > -1).$$

эдэснэ $a_i (i = \overline{1, n})$ эдэдлэринин m тэртиб орта дэрэгэли гижмэти дежилир.

Хүсуси халса,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^m$$

ифадэси биртэртибли биртэрэгэли орта гижмэт олмагла, хэмин эдэдлэрин хесаби орта гижмэти илэ үст-үст дүшүр.

Тэ'риф 4.

$$H = \left(\frac{(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1})^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$$

эдэснэ, $a_i (i = \overline{1, n})$ эдэдлэринин хармоник орта гижмэти дежилир.

Тэ'риф 5.

$$Q = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$$

эдэснэ $a_i (i = \overline{1, n})$ эдэдлэринин квадратик орта гижмэти дежилир.

§ 2. КОШИ БЭРАВЭРСИЗЛИКЛЭРИ

Эдэди орта алэ хэндэси ортаны элагэлэн цэрэн ашагыдакы теоремы исбат едэк.

Теорем 1. Мэнфи олмајан ($a_i > 0, 0 = \overline{1, n}$) истэнилэн n эдэдин эдэди орта гижмэти бу эдэдлэрин хэндэси орта гижмэтиндэн кичик дежил.

Јэ'ни

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

бэрабэрсизлији доғрудур.

Эввэлчэ ашагыдакы лемманы исбат ед 1.

Лемма $\forall a_i > 0 (i = \overline{1, n})$ эдэди, ... лемма 3. бэрабэр оларса, онда бу ед дээрлэ чэмийн дээрлэ дежилдир. Башга сөзлэ

$$\prod_{i=1}^n a_i = 1 \text{ оларса, } \sum_{i=1}^n a_i \geq n.$$

Гејд. Насилдә иштирак едән a_i ($i = \overline{1, n}$) әдәдләринин һамысы бир-биринә бәрәбәр олмаса, онда

$$\sum_{i=1}^n a_i > 0.$$

Әкс һалда $\sum_{i=1}^n a_i = n.$

■ Исбат үчүн там ријәзи индуксија методундан истифада едәк, јәни $n = 2$ һалы үчүн лемманын доғру олдуғуну көстәрәк. Башга сөзлә $a_1 a_2 = 1$ олдуғда $a_1 + a_2 \geq 2$ олдуғуну исбат едәк

$$a_1 + a_2 - \frac{1}{a_1} + a_1 - 2 + 2 = \frac{(a_1 - 1)^2}{a_1} + 2 \geq 2$$

олдуғундан $n = 2$ һалы үчүн лемма исбат олунду. Ашкардыр ки, $a_1 = a_2 = 1$ оларса, бәрәбәрлик һалы алыныр.

Инди исә $n = k \geq 2$ һалы үчүн лемманын доғрулуғуну гәбул едиб, $n = k + 1$ үчүн доғрулуғуну исбат едәк. Башга сөзлә $\prod_{i=1}^k a_i = 1$ верилдикдә $\sum_{i=1}^k a_i \geq k$ олдуғуну фәрз едиб, $\prod_{i=1}^{k+1} a_i = 1$ оларса $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq k + 1$ олдуғуну көстәрәк.

$\prod_{i=1}^{k+1} a_i = 1$ шәрти өдәниләрсә, онда ашағыдәкы ики һал мүмкүндүр

1) вуруғларын һамысы ($a_i, i = \overline{1, k+1}$) бир-биринә бәрәбәрләр.

2) вуруғларын ичәрисиндә бир-биринә бәрәбәр олмајанлар вар.

Биринчи һалда һәр бир вуруғ ваһид олмалыдыр вә нәтицәдә бунларын чәми $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k + 1$ олар.

Икинчи һалда вуруғларын ичәрисиндә һәм ваһиддән бөјүк вә һәм дә ваһиддән кичик әдәдләр иштирак едәчәкләр. Доғрулаң да әкәр бүтүн вуруғлар ваһиддән кичик оларса, онда бунларын һасили ваһиддән кичик, бүтүн вуруғлар ваһиддән бөјүк оларса, һасил ваһиддән бөјүк олар. Оңа көрә һасилдә иштирак едән вуруғлардан һәм ваһиддән бөјүк вә һәм дә ваһиддән кичик сланы олмалыдыр. Мүәјјәнлик үчүн $a < 1$ вә $a_{k+1} > 1$ олдуғуну фәрз едәк

Шәртә көрә $a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} = 1$. Ахырынчы бәрәбәрлији $(a_1 a_{k+1}) a_2 a_3 \dots a_k = 1$ шәклиндә дә јазмәг олар $a_1 a_{k+1} = b$ илә ишарә етсәк

$$b a_2 a_3 \dots a_k = 1 \quad (1)$$

олдуғуну аларыг. (1) бәрәбәрлијинин сол тәрәфи k сәјдә вуруғдан ибарәт олдуғуну вә лемманын $k - 1$ һалы үчүн доғру олдуғуну гәбул етдијимиздән

$$b + a_2 + a_3 + \dots + a_k \geq k \quad (2)$$

олдугуну аларыг. Дикэр тэрэфдэн

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = (b + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + a_1 + a_{k+1} - b$$

барабэрлијиндэ (2)-ни нэзэрэ алсаг,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} &\geq k + a_{k+1} - b + a_1 \\ (k+1) + a_{k+1} - b + a_1 &= (k+1) + a_{k+1} - a_1 a_{k+1} + a_1 - 1 = \\ &= k+1 + (a_{k+1} - 1)(1 - a_1). \end{aligned} \quad (3)$$

$a_1 < 1$, $a_{k+1} > 1$ олмасындан $(a_{k+1} - 1)(1 - a_1) > 0$ олдугуну аларыг. (3) барабэрсизлијиндэ $(a_{k+1} - 1)(1 - a_1)$ һасилини атсаг, барабэрсизлик таһа да күчлэнэр, јә'ни

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i > k+1$$

олар. ■

◀ Инди исэ леммадан истифаде елэрэк теоремин доғру олдугуну исбат едэк.

Билирикки, $a_i > 0$ ($i = 1, n$) эдэдлэринин һэндэси ортасы

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (4)$$

барабэрлији илэ тә'јин олунур. (4) барабэрлијинин һәр тэрәфини G эдэдинә бөлсәк,

$$1 = \sqrt[n]{\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \dots \frac{a_n}{G}}$$

вэ јә

$$\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \dots \frac{a_n}{G}$$

олдугуну аларыг. Онда леммаја әсәсэн

$$\frac{1}{G} \sum_{i=1}^n a_i \geq n, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq G$$

вэ јә

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \quad (5)$$

олар. ►

(5) барабэрсизлијинә Коши барабэрсизлији дејилвр.

Теорем 2. $a_i > 0$ ($i = 1, n$) эдэдлэринин эдәди орта гијмәти A , һэндэси орта гијмәти G , һармоник орта гијмәти H вэ квадратик орта гијмәти Q арасында

$$H \leq G \leq A \leq Q$$

барабэрсизлији доғрудур.

◀ Теорем 1-дә исбат един ки, $A \geq G$.

$H \leq G$ олдугуну исбат едәк. Коша бәрабәрсәлијинә әсәсән

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \dots \frac{1}{a_n}} \quad (6)$$

олар. (6)-дан ашағыдакыны јаза биләрик:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \geq \frac{H}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a_n}} = H.$$

Инди исә $A \leq Q$ олдугуну исбат едәк.

Башга сөзлә

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \geq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (7)$$

бәрабәрлизијиниң доғру олдуғуну исбат едәк. (7) бәрабәр-
сәлијиниң доғру олдуғуну көстөрмәк үчүн әввәлчә

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (8)$$

бәрабәрлизијиниң доғру олдуғуну көстөрәк

Бу мәгсәдлә a_1, a_2, \dots, a_n b шәраә етәк. Бу бәра-
бәрликләни

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \frac{b}{n} & m_1 \\ a & b & m_2 \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ a_n & \frac{b}{n} & m_n \end{array} \quad (9)$$

янырыг. (9) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфи топласак,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b + m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (10)$$

олар. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b$ вә (10) бәрабәрликләрни дәч ала-
рыг ки,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0. \quad (11)$$

(9) бәрабәрликләрини квадрата јүксәлтсәк,

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 &= \frac{b^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{b}{n} m_1 + m_1^2, \\ a_2^2 &= \frac{b^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{b}{n} m_2 + m_2^2, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n^2 &= \frac{b^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{b}{n} m_n + m_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

олдугуну аларыг.

(12) бəрəбəрлɨктəрлɨнɨ тəрəф-тəрəфə тoпласаг.

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{b^2}{n} + \frac{2b}{n}(m_1 + m_2 + \dots + m_n) + \\ + (m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2). \quad (13)$$

(11) барабарлигини (13)-да нәзәрә алсаң

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{b^2}{n} + m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2 \quad (14)$$

олар, $\sum_{i=1}^n m_i^2 > 0$ олдуғу үчүн

$$a_1, a_2, \dots, a_n \geq \frac{b}{n}$$

Ba ja

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2$$

(8) бэрэбэрсизлигт исбат олуул. (8) бэрэбэрсизлигт нэг нэр тэрэфиин и-э бэлдүб көк алсаг

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

вə ja $A \leq Q$.

Беләликлә, исбат етдик ки, $H \leq G \leq A \leq Q$. ►

Теорем 3. *Үа, вә b ($i = 1, n$) һэгиги әдәдләри үчүн*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (15)$$

бэрабэрсизлији доғрудур.

▲ Ашағыдакы функция баһаг:

$$F(x) = \sum_{l=1}^h (a(x) - p_l)^2 - x^2, \quad \sum_{l=1}^h a^2 = 2x, \quad \sum_{l=1}^h a - p_l = \sum_{l=1}^h b_l - 1 - h.$$

Ашкардыр ки,

$$F(x) \geq 0. \quad (17)$$

(17)-дэн алырыг ки, (16) чохъадлиси ја бәрабәр һәгиги көкә вә ја тошма комплекс көкә маликдир. Бу исә о демәкдир ки, онун дискриминанты мүсбәт дејилдир:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0. \quad (18)$$

(18) бәрабәрсизлијиндә икинчи топлананы сағ тәрәфә кеңириб көк алсаг, теорем исбат олунар. ►

Бу теоремдән ашагыдакы нәтичә чыхыр.

Нәтичә.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (19)$$

(19) бәрабәрсизлијини исбат егмәк үчүн, (15) бәрабәрсизлијини тәтбиг егмәклә $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2$ чәмини гијметләндирәк

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Сонунчу бәрабәрсизликтән квадрат көк алсаг, (19) бәрабәрсизлијини аларыг.

Гәјд етәк ки, a_i вә b_i әдәлләри мүтәнасиб $\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} \right)$ оларса, (15) бәрабәрсизлији бәрабәрлијә чеврилир.

§ 3. ЛУНГ* БӘРАВӘРСИЗЛИЈИ

Лемма. $u > 0$, $v > 0$ әдәлләри вә ваһиддән бөјүк олан $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ бәрабәрлијини өдәјән p вә q әдәлләри үчүн

$$uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \quad (1)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

* Вилјам Лунг (1882—1946) инкилис ријазийјатчысыдыр.

§ 4. ИНТЕГРАЛ ҮЧҮН КОШИ БУНЖАКОВСКИ*—ШВАРС** БӘРӘБӘРСИЗЛИЖИ

Теорем. $f(x)$ вә $g(x)$ функцијалары $[a, b]$ парча-сында квадраты илә интегралланандырса, јә'ни

$$A = \int_a^b f^2(x) dx, C = \int_a^b g^2(x) dx \text{ вә } B = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (1)$$

интеграллары сонлудурса, онда

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

вә ја

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1')$$

бәрәбәрсизлији доғрудур.

◀ Ихтијари λ үчүн

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geq 0$$

олар. Онда

$$\int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0. \quad (2)$$

(1) вә (2)-дән истәнилән λ үчүн

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0 \quad (3)$$

олар. Онда

$$y = C\lambda^2 + 2B\lambda + A \quad (4)$$

үчүн дискриминанты $B^2 - AC \leq 0$ олар. Сонунчудан

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

вә ја

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

олар. ▶

* Бунжакowski (Бунжак вейс, 1904—1989) көркәмли рус риязијатчысыдыр.

** Керман Амантус Шварс (1843—1921) мәшһур алман рия-
зијатчысыдыр.

§ 5. ИНТЕГРАЛ ВЭ ЧЭМ ҮЧҮН БӨЛДЕР* БЭРЭВЭРСИЗЛИГИ

Теорем 1. *Фэрз едэк ки, $x(t)$, $y(t)$ функцијалары $[a, b]$ парчасында тә'јин едилмишдир вә бу функцијалар үчүн*

$$\int_a^b |x(t)|^p dt, \quad \int_a^b |y(t)|^q dt$$

интеграллары вар вэ сыфырдан фэрглидир. Бундан башга p вэ q эдэдлэри үчүн $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ шэрти өдэни-
лир. Онда $x(t)$ $y(t)$ функцијасы да $[a, b]$ парчасында интегралланандыр вэ

$$\int_a^b x(t) y(t) \, dt = \left(\int_a^b x(t) \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b y(t) \, dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

олар.

$$\mu = \frac{V(t)}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}}, \quad \bar{\mu} = \frac{Y(t)}{\left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}} \quad (2)$$

ишарэ е.ск.

(2) φ — аксиоматическая формула, а ψ — формула, построенная по аксиоматическим формулам с помощью правил логики.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \frac{|x(t)y(t)|}{1} \leq \\ &\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^q |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{|x(t)|^p}{p \int_a^b |x(t)|^p dt} + \frac{|y(t)|^q}{q \int_a^q |y(t)|^q dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Продолжая рассуждения, мы приходим к тому, что $\{a, b\}$ — базис \mathcal{A} над \mathcal{B} . Тогда \mathcal{A} — базис \mathcal{A} над \mathcal{B} . \square

дасар,

$$\frac{\int_a^b |x(t)y(t)| dt}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\int_a^b |x(t)|^p dt}{p \int_a^b |x(t)|^p dt} + \frac{\int_a^b |y(t)|^q dt}{q \int_a^b |y(t)|^q dt}.$$

Саг тэрэфтэки кэсрлэрдэ ихтисар апарсаг,

$$\frac{\int_a^b |x(t)y(t)| dt}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (4)$$

(4) бэрэбэрсизлижэндэн (1)-ин догрулуугу асанлыгла алыныр. ►

Гейд. Хүсуси нэлдэ $p, q \geq 2$ олзса, Коши—Буняковски бэрэбэр сизлижи алынар.

Теорем 2. *Фэрз едэк ки, $\{u_k\}$ вэ $\{v_k\}$ ардычыллыгларынын*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q$$

сыралары жыгылыр. p вэ q эдэдлэри үчүн $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ бэрэбэрлижи догрудур. Онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|$$

сырасы да жыгыландыр вэ чэм үчүн ашагыдакы нөл-дер бэрэбэрсизлижи догрудур:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (5)$$

$$u = \frac{|u_k|}{\left(\sum_{v=1}^{\infty} |u_v|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad v = \frac{|v_k|}{\left(\sum_{v=1}^{\infty} |v_v|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

ишарэ едиб Јунг бəрабəрсизлијини тəтбиғ етсəк,

$$\begin{aligned} uv &= \frac{|u_k v_k|}{\left(\sum_{v=1}^{\infty} |u_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} |v_v|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \\ &\leq \frac{|u_k|^p}{p \sum_{v=1}^{\infty} |u_v|^p} + \frac{|v_k|^q}{q \sum_{v=1}^{\infty} |v_v|^q}. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) бəрабəрсизлијини k -ја ($k = 1, \infty$) нəзəрəн қəмлəсəк

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|}{\left(\sum_{v=1}^{\infty} |u_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} |v_v|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^q}{q \sum_{v=1}^{\infty} |u_v|^q} + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q}{q \sum_{v=1}^{\infty} |v_v|^q}, \quad (7)$$

(7) бəрабəрсизлијинин сағ тəрəфиндə иштирак едəн сыралар јығылан олдуғу үчүн $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|$ сырасы да јығылан олар.

(7)-дə сағ тəрəфдə v -нү k илə əвəз етсəк,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Сонунчу бəрабəрсизликдən (5)-ин дoғру олмасы асанлығла алыныр. ►

Г е] д. Хүсуси нaalдa $p = q = 2$ олapca, (5)-дэн

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Коши бapабepcизлији aлынap.

§ 6. ИНТЕГРАЛ ВЭ ЧЭМ ҮЧҮН МИНКОВСКИ* БЭРЭВЭРСИЗЛИЈИ

Тeopeм 1. $[a, b]$ нaрчacындa $x(t)$, $y(t)$ фyнкциjалapынын тэjин олyндyгyнy вэ

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty, \quad \int_a^b |y(t)|^p dt < \infty, \quad p \geq 1$$

интeгрaллapынын вapлынынчы вэ cэтгy олдyгyнy фэpзeдэx. Ондa $x(t)$, $y(t)$ фyнкциjасы дa интeгрaллaгчн олмaглa ашaгыдaкы Минкoвcки

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

бapабepcизлији дoгpyдyp.

Эввэлчэ ашaгыдaкы Лeмманы лeбит eтэx.

Лeммa. a, b нaрчacындa $|x(t)|^p + |y(t)|^p < \infty$ бoлoн $p \geq 1$ олдyгдa,

$$|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p) \quad (1)$$

бapабepcизлији дoгpyдyp.

◀ Үмyнyт jа гoзмoлгoч $|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$ бoлoн $p \geq 1$. Ондa $|a + b| \leq 2^{1/p} (|a|^p + |b|^p)^{1/p}$ вэ нэгичэ

$$|a + b| \leq 2^{1/p} (|a|^p + |b|^p)^{1/p} \leq 2^{1/p} (|a|^p + |b|^p)^{1/p}$$

олap. ▶

◀ Тeopeм 1-ийн cэтгyнy (1) бapабepcизлији ндэл нcтaфa э eдэx jик. Ондa

$$|x(t) + y(t)|^p \leq 2^p (|x(t)|^p + |y(t)|^p). \quad (2)$$

(2) бapабepcизлији в тeгeдэч $\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \leq 2^p \left(\int_a^b |x(t)|^p dt + \int_a^b |y(t)|^p dt \right)$ бoлoн.

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt < \infty. \quad (3)$$

Г. С. М. И. Минковский (1876-1941) (1900-1901) (1901-1902) (1902-1903) (1903-1904) (1904-1905) (1905-1906) (1906-1907) (1907-1908) (1908-1909) (1909-1910) (1910-1911) (1911-1912) (1912-1913) (1913-1914) (1914-1915) (1915-1916) (1916-1917) (1917-1918) (1918-1919) (1919-1920) (1920-1921) (1921-1922) (1922-1923) (1923-1924) (1924-1925) (1925-1926) (1926-1927) (1927-1928) (1928-1929) (1929-1930) (1930-1931) (1931-1932) (1932-1933) (1933-1934) (1934-1935) (1935-1936) (1936-1937) (1937-1938) (1938-1939) (1939-1940) (1940-1941)

Инди исә (3) интегралыны гәҗмәтләндирәк

$$\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt = \int_a^b |x(t) - y(t)|^{p-1} |x(t) - y(t)| dt$$

$$= \int_a^b |x(t) - y(t)|^{p-1} x(t) dt - \int_a^b |x(t) - y(t)|^{p-1} y(t) dt. (4)$$

$$q = \frac{p}{p-1} \text{ булганда, } \dots \text{ булганда, } \dots$$

Яг. Белә ки,

$$\int_a^b |x(t) - y(t)|^{p-1} q dt = \int_a^b |x(t) - y(t)|^{p-1} p dt$$

$$= \int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt < \infty \quad (5)$$

бәрабәрләрнең һәр беренчесен

(4)-үч сәттең һәр беренчесен бәрабәрләп, һәм тогыгы

$$\left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^{p-1} q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\left[\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \quad (6)$$

(6) бәрабәрлештәге һәр бер тәрефнең $\left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}}$

бәлүб, $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ оңдугуну һәзәрә аласыг

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}. \quad (9)$$

(9) бəрəбəрсизлијинин һәр тərəфини $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$ - җə

бөлсəк вə $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ олдуғуну да нəзərə алсаг,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

олдуғуну аларыг. ►

Јухарыда исбат едилən бəрəбəрсизликлəрин тəтбиги вəси-
тəсинə дəгиг емлəр сəһсиндə чох бəјүк нəтичəлəр алын-
мышдыр.

Истифадэ олунмуш эдэбијјат

- 1 Грауерт Г., Либ И., Фишер В. Инфференциальное и интегральное исчисление. М., изд. „Мир“, 1971.
2. Эзимов М. Э., Сэлимов Ф. Ё. Гејри-мүэјјэн интеграл Бақы. В. И. Ленин адына АПИ-нин нәшријјаты, 1983.
3. Эзимов М. Э., Сэлимов Ф. Ё. Мүэјјэн интеграл. Бақы, В. И. Ленин адына АПИ-нин нәшријјаты, 1984.
- 4 Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. т. I, МГУ, 1985.
- 5 Ильин В. А., Пазняк Э. Г. Основы математического анализа. М. Изд. „Наука“, 1965.
6. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. I ч., М. Л., Техничко-теоретическое издательство, 1933.
- 7 Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа М., Изд. технико-теоретической литературы, 1953
8. Шарл Эрмит Ку, с анализ, М. Л., ОНТИ, 1936.

МҮНДЭРИЧАТ

Кириш

І Н И С С Э ГЕЈРИ-МҮЭЈЖЭН ИНТЕГРАЛ

I фэсил Ибтидаи функсија, эсас анлајышлар вэ тэ'рифлэр

§ 1. Интеграл хесабынын эсас мэсэлэлэри	5
§ 2. Гејри-мүэјжэн интегралын хэндэси мэ'насы	9
§ 3. Гејри-мүэјжэн интегралын хассалэри	10

II фэсил. Эсас интеграллама методлары

§ 1. Билаваситэ интеграллама	11
§ 2. Интегралламада эвэзлэмэ методу	14
Чалышмалар.	
§ 3. Ниссэ-ниссэ интеграллама методу	18
Чалышмалар.	
§ 4. Ајырма методу	24
§ 5. Садэ кэсрлэрин интегралланмасы	25
Чалышмалар.	

III фэсил Чоххэдлийни вуруглара ајрылмасы

§ 1. Чэбри чоххэдлийлэрин вуруглара ајрылмасы	29
§ 2. Нэгиги эмсаллы чэбри чоххэдлийни кэтирилмэјэн вуруглара ајрылмасы	33
§ 3. Дүзкүн расионал кэсри садэ кэсрлэрин чэми шэклиндэ кэстэрилмэ.и	34
§ 4. Нэгиги эмсаллы кэсрлэрин садэ кэсрлэрэ ајрылмасына анд мисаллар	39
Чалышмалар.	
§ 5. Остроградски методу	45
Чалышмалар.	

IV фэсил Иррасионал функсијаларын интегралланмасы

§ 1. Садэ иррасионал функсијаларын интегралланмасы	53
§ 2. Ејлэр эвэзлэмэлэри	55
§ 3. Ејлэр эвэзлэмэлэринин хэндэси мэ'насы	71
§ 4. Биномиал дифференциалларын интегралланмасы	77
Чалышмалар.	
§ 5. Абел эвэзлэмэси	77

V фэсил Трансцендент функсијаларын интегралланмасы

§ 1. Синус вэ косинусларын нэсиллэри иштирак едэн функсијаларын вэ бэйлэ трансцендент функсијаларын интегралланмасы	72
§ 2. $f(\sin x, \cos x)$ шэклиндэ олан функсијаларын интегралланмасы	81
§ 3. Кэтирмэ дүстурлары	86
Чалышмалар.	

§ 4. Гиперболик функцијаларын интегралланмасы	94
Ч а л ы ш м а л а р.	
§ 5. Гејри-мүөжөн эмсаллар методу	99
Ч а л ы ш м а л а р.	
§ 6. Бәзи хусуси функцијаларын интегралланмасы	106
§ 7. Еллиптик интеграла кәтирилән бәзи мәсәләләр	107
§ 8. Еллиптик интеграллар	109

II Ы И С С Ә МҮӨҖҖӨН ИНТЕГРАЛ

I фәсил. Риман интегралы

§ 1. Бәзи тәрифләр	113
§ 2. Интеграл чәминин һәндәси мәнасы	118
§ 3. Ашағы вә јухары Дарбу чәмләри	120
§ 4. Дарбу чәминин хәссәләри	124
§ 5. Римана керә интегралланан функцијалар	132
§ 6. Мүөжјөн интегралын һесаблинамасы	138
§ 7. Мүөжјөн интегралын хәссәләри	141
§ 8. Орта гијмәт теореми	148
§ 9. Мүөжјөн интеграл јухары сәрһәдин функцијасы кими	155
§ 10. Мүөжјөн интегралда дәјишәнин әвәз едилмәси	158
§ 11. Мүөжјөн интегралда һиссә-һиссә интеграллама	163
§ 12. Валлис дүстуру.	166
§ 13. Чүт вә төк функцијаларын интегралланмасы	167
§ 14. Периодик функцијанын интегралланмасы	172
§ 15. Тејлор дүстурунун галыг һәддинин интеграл формада верилиши	174
§ 16. Интегралдан мүрәккәб функција кими төрәмә алмаг	175
Ч а л ы ш м а л а р.	

II фәсил. Мүөжјөн интегралын үмумиләшмәси

§ 1. Биринчи нөв гејри-мәхсуси интеграл	182
§ 2. Гејри-мәхсуси интегралын јығылма әләмәти	187
§ 3. Икинчи нөв гејри-мәхсуси интеграл	194
§ 4. Гејри мәхсуси интегралын баш гијмәти	197
Ч а л ы ш м а л а р.	

III фәсил. Мүөжјөн интегралын тәгриби һесаблинамасы

§ 1. Дүзбучаглылар методу	202
§ 2. Трапесијалар методу	205
§ 3. Симпсон дүстуру (парабола методу)	211
Ч а л ы ш м а л а р.	

IV фәсил. Мүөжјөн интегралын һәндәси тәتبигләри

§ 1. Мүстәви фигурун сәһәси	216
§ 2. Чисмин һәчминин тәјјини	223
§ 3. Әјри гөвсүнүн узунлуғу	228
§ 4. Фырланма сәтһинин сәһәси	234
Ч а л ы ш м а л а р.	

V фәсил. Мүөжјөн интегралын механикаја тәتبигләри

§ 1. Статик момент вә ағырлыг мәркәзи	239
§ 2. Мүстәви әјрисинин статик моментни вә ағырлыг мәркәзинин тапылмасы	241
§ 3. Мүстәви фигурун статик моментинин вә ағырлыг мәркәзинин тәјјини	246
Ч а л ы ш м а л а р.	

VI фәсил. Параметрдән асылы мұәјјән интеграл

§ 1. Бә'зи аңлајышлар	252
§ 2. Параметрдән асылы интегралың кәсілмәзлијә	255
§ 3. Параметрдән асылы интегралың дифференциалланмасы	258
§ 4. Параметрә нәзәрән интеграллама	260
§ 5. Параметрдән асылы гејри-мәхсус интеграл	267
Ч а л ы ш м а л а р.	

VII фәсил. Ејлер интеграллары.

§ 1. Биринчи нөв Ејлер интегралы	268
§ 2. Икинчи нөв Ејлер интегралы	272
Ч а л ы ш м а л а р.	

VIII фәсил. Чәм вә интеграл үчүн бә'зи бәрабәрсизликләр

§ 1. Бә'зи тә'рифләр вә аңлајышлар	276
§ 2. Коши бәрабәрсизликләри	277
§ 3. Јунг бәрабәрсизлији	282
§ 4. Интеграл үчүн Коши-Бунјаковски-Шварс бәрабәрсизлији	284
§ 5. Интеграл вә чәм үчүн Гөлдер бәрабәрсизлији	285
§ 6. Интеграл вә чәм үчүн Минковски бәрабәрсизлији	288

*Азимов Муса Али оглы,
Салимов Фазил Гази оглы*
(кандидаты физико-математических наук, доценты)
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
учебное пособие для педвузов
(на азербайджанском языке)

Редаксия мудири *К. М. Мехралиев*
Нашрият редактору *Е. К. Дадашова*
Чилдини рессамы *Е. А. Чалилов*
Бэди редактору *Ј. Ф. Катакалидис*
Техники редактору *М. Ә. Әлскарова*
Корректорлары *С. И. Гадыјева, Е. И. Тејмурова*

ИБ—2989

Тыгылмагъ верилмиш 17. 01. 86. Чапа имзаланмиш 25. 04. 86. Карыз форматы 60X90^{1/16}. Матбаа кагызы № 2. Латын гарнитур. Јуксак чап. Физики ва шэрти ч. в. 18,5. Шэрти ранк-оттиск 18,69. Учот нэшр. вараги 15,7. Тиражы 3200. Сифариш 125. Чилдэе гымэти 80 гоп.

Азербайжан ССР Девлет Нашријат, Полиграфија ва Китаб Тимарэти Ишлэри Комитэсинин „Маариф“ нашријаты, Баки 370111, Ә. Тагизадэ кучэси, № 4.

Азербайжан ССР Девлет Нашријаты, Полиграфија ва Китаб Тичарэти Ишлэри Комитэсинин 3 №-ли Баки Китаб Матбэеси. Баки, Ә. Тагизадэ кучэси, № 4.

Азербайжанское государственное издательство учебно-педагогической литературы „Маариф“ г. Баку, ул. А. Тагизаде, № 4.

Бакинская книжная типография № 3. г. Баку, ул. А. Тагизаде № 4.

80 гал.

